

*prochus@ulg.ac.be*  
*v.rochus@ulg.ac.be*

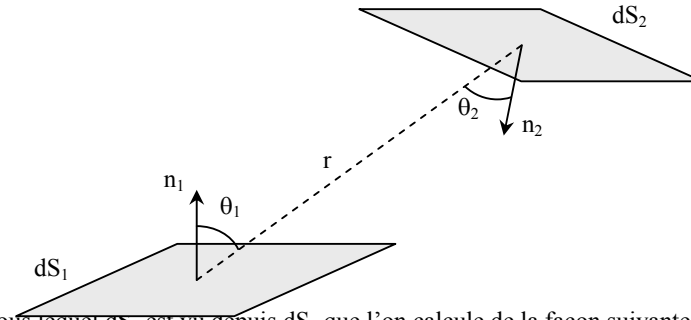
# Contrôle thermique spatial

**Véronique ROCHUS**  
**Pierre ROCHUS**  
**ULg**

## Calculs d'échanges par rayonnement

### Facteurs de vue\*

Soit deux surfaces  $A_1$  et  $A_2$  de type corps noirs formant un système fermé.



Soit  $d\omega_{12}$  l'angle solide sous lequel  $dS_2$  est vu depuis  $dS_1$  que l'on calcule de la façon suivante :

$$d\omega_{12} = \frac{\cos\theta_2 \cdot dS_2}{r^2}$$

La puissance émise par  $dS_1$  et absorbée par  $dS_2$  vaut :

$$d\Phi_{1 \rightarrow 2} = \cos\theta_1 dS_1 L_1 d\omega_{1 \rightarrow 2}$$

où  $L_1$  est la luminance de la surface  $dS_1$  (càd l'intensité par unité de surface apparente dans une direction donnée).  
La fraction de puissance émise par  $A_1$  et celle absorbée par  $A_2$  est :

$$\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{\Phi_1} = \frac{1}{\pi A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r^2} dS_1 dS_2$$

Pour être plus rigoureux nous devrions écrire :

$$\frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{\Phi_1} = \frac{1}{\pi A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\eta(\cos\theta_1) \cdot \eta(\cos\theta_2)}{r^2} dS_1 dS_2$$

$$\text{où } \eta(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

On définit le facteur de vue  $F_{ij}$  (géométrique de  $i$  vers  $j$ ) :

$$F_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{\Phi_i}$$

\* A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors : <http://www.me.utexas.edu/~howell/index.html>  
Infos utiles pour les calculs thermiques: <http://www.efunda.com/home.cfm> ; <http://www.tak2000.com> ;  
<http://www.thermal-wizard.com/tmwiz/>

# Contrôle thermique

Propriétés des facteurs de vue

- Réciprocité :

Par définition on a :

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi A_i} \iint_{A_i, A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{r^2} dS_i dS_j$$

On peut donc écrire :

$$A_i F_{ij} = \frac{1}{\pi} \iint_{A_i, A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{r^2} dS_i dS_j = A_j F_{ji}$$

$$\boxed{A_i F_{ij} = A_j F_{ji}}$$

- Complétude :

Si N surfaces forment une enceinte fermée, la conservation de l'énergie implique que :

$$\boxed{\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1}$$

où j représente toutes les faces vues par  $i \leq N$ .

- Pour un corps k convexe vers l'enceinte, il est évident que :

$$\boxed{k \text{ convexe} \Rightarrow F_{kk} = 0}$$

En particulier, si un corps j entoure complètement le corps convexe k :

$$\boxed{F_{kj} = 1}$$

a) *Algèbre des facteurs de vue*

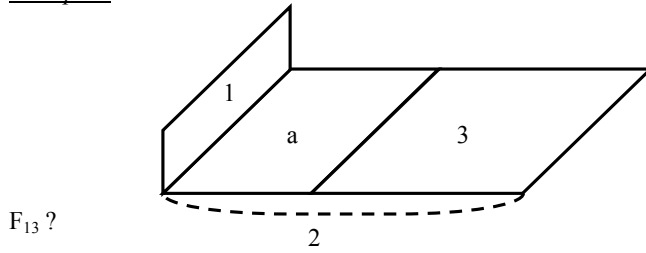
Si les  $j$  sont tous disjoints, on a :

$$F_{i, \cup_j} = \sum_j F_{ij}$$

Sinon,

$$F_{1,2 \cup 3} = F_{1,2} + F_{1,3} - F_{1,2 \cap 3}$$

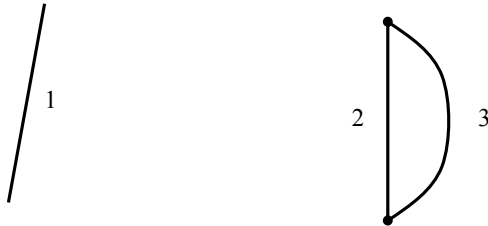
Exemple :



$F_{1,2}$  donné dans un table pour dimensions quelconques.

$$F_{1,2} = F_{1,a} + F_{1,3} \quad \rightarrow \quad F_{1,3} = F_{1,2} - F_{1,a}$$

b)



Tout rayon partant de 1 et qui coupe 2 coupera 3.

$$F_{12} = F_{13}$$

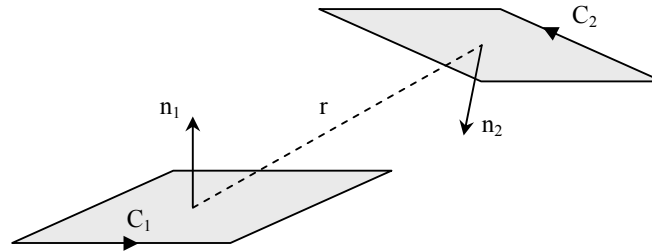
Par contre,

$$F_{31} = \frac{A_2}{A_3} F_{21}$$

Surfaces infinies dans la direction perpendiculaire au plan du dessin.

c) *Intégration de contour :*

Considérons deux surfaces de contour  $C_1$  et  $C_2$  n'ayant pas de facteur de vue d'elle-même.



$$F_{12} = \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_2$$

$r$  étant la distance de 1 à un point courant de  $A_2$ .

$$\begin{aligned} F_{12} = & \frac{l_1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{(z_2 - z_1) dy_2 - (y_2 - y_1) dz_2}{r^2} \\ & + \frac{m_1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{(x_2 - x_1) dz_2 - (z_2 - z_1) dx_2}{r^2} \\ & + \frac{n_1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{(y_2 - y_1) dx_2 - (x_2 - x_1) dy_2}{r^2} \end{aligned}$$

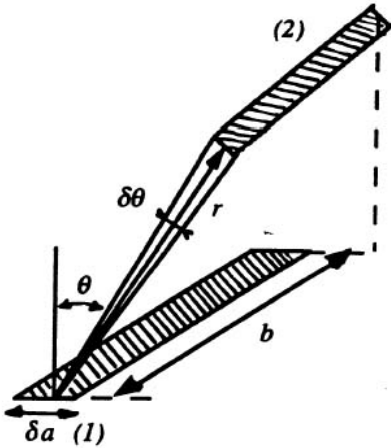
où  $l, m, n$  sont les cosinus directeurs.

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \int_{C_1} \int_{C_2} (\ln r dx_2 dx_1 + \ln r dy_2 dy_1 + \ln r dz_2 dz_1)$$

Le passage de l'intégrale de surface à l'intégrale de contour fait l'hypothèse que  $\cos\theta_i = \eta(\cos\theta_i)$  ; cela signifie que pour que cette intégrale de contour soit valable, il faut que tout point d'une surface soit vu à partir de tout point de l'autre surface !

Formulaire :

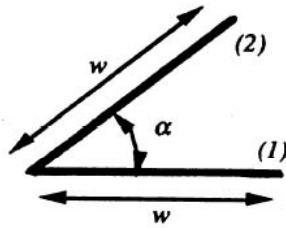
## VII.1. Facteurs de forme /45/



- 1. Bandes élémentaires de longueur finie  $b$ , de largeur  $\delta a$ , à génératrices parallèles.

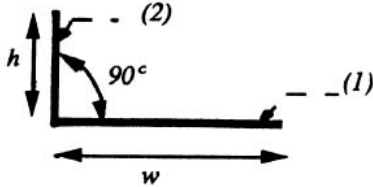
$$\delta f_{12} = \frac{\cos\theta}{\pi} \delta\theta \operatorname{arctg} \frac{b}{r}$$

$$\text{si } b \text{ infini : } \delta f_{12} = \frac{\cos\theta}{2} \delta\theta = \frac{\delta(\sin\theta)}{2}$$



- 2. Deux portions de plan de longueur infinie, de largeur  $w$ , formant un dièdre d'angle plan  $\alpha$ .

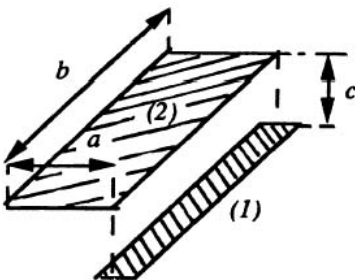
$$f_{12} = f_{21} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2}$$



- 3. Deux portions de plan de longueur infinie, de largeurs respectives  $h$  et  $w$ , formant un dièdre d'angle plan égal à  $90^\circ$ .

$$H = \frac{h}{w}$$

$$f_{12} = \frac{1}{2} [1 + H - \sqrt{1 + H^2}]$$

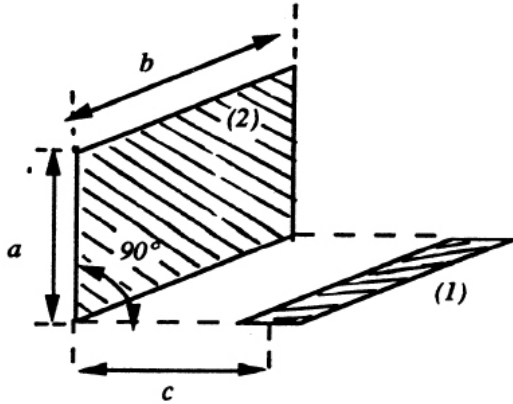


- 4. Bande élémentaire parallèle à un rectangle (voir schéma).

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$

$$f_{12} = \frac{1}{\pi Y} \left[ \sqrt{1 + Y^2} \operatorname{arctg} \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} - \operatorname{arctg} X + \frac{XY}{\sqrt{1 + X^2}} \operatorname{arctg} \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} \right]$$

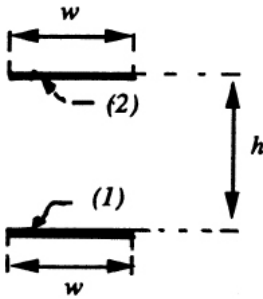
# Contrôle thermique



- 5. Bande élémentaire dans un plan perpendiculaire à un rectangle (voir schéma).

$$X = \frac{a}{b} \quad Y = \frac{c}{b}$$

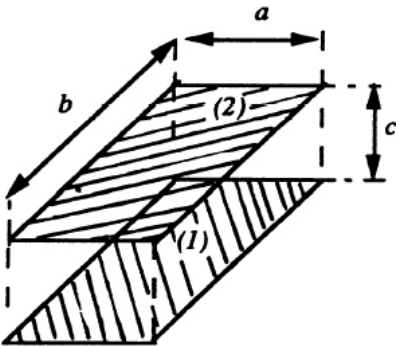
$$f_{12} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2} \ln \left[ \frac{Y^2(X^2 + Y^2 + 1)}{(Y^2 + 1)(X^2 + Y^2)} \right] - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \arctg \left[ \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right] \right\}$$



- 6. Bandes de longueur infinie, parallèles, de même largeur  $w$  et opposées.

$$H = \frac{h}{w}$$

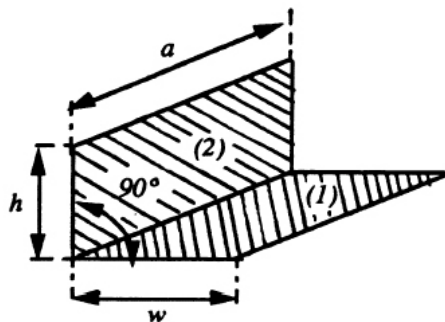
$$f_{12} = f_{21} = \sqrt{1 + H^2} - H$$



- 7. Rectangles identiques, parallèles et opposés.

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$

$$f_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[ \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2} \right]^{1/2} + X \sqrt{1 + Y^2} \arctg \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} + Y \sqrt{1 + X^2} \arctg \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} - X \arctg X - Y \arctg Y \right\}$$



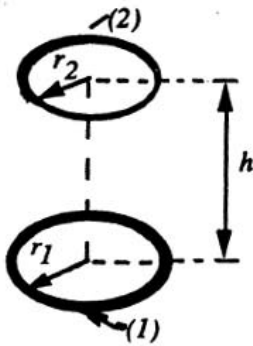
- 8. Rectangles de même longueur  $a$  ayant un côté commun et situés dans des plans perpendiculaires.

$$H = \frac{h}{a} \quad W = \frac{w}{a}$$

$$f_{12} = \frac{1}{\pi W} \left[ W \arctg \frac{1}{W} + H \arctg \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \arctg \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \ln \left\{ \left[ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{(1 + W^2 + H^2)} \right] \left[ \frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \left[ \frac{H^2(1 + H^2 + W^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\}$$

# Contrôle thermique

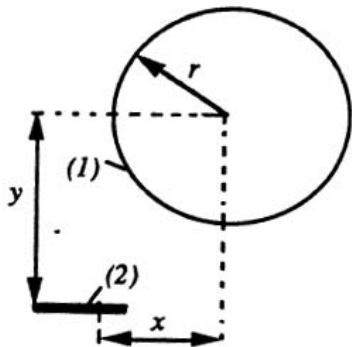


- 9. Disques circulaires parallèles de même axe.

$$R_1 = \frac{r_1}{h} \quad R_2 = \frac{r_2}{h}$$

$$X = 1 + \frac{1 + R_2^2}{R_1^2}$$

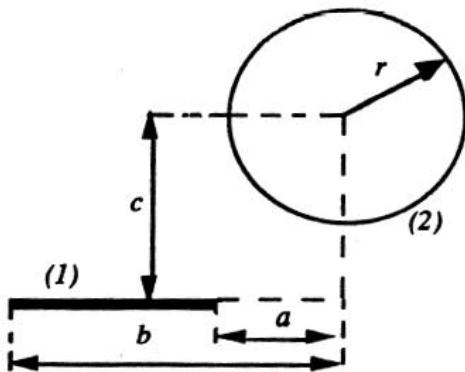
$$f_{12} = \frac{1}{2} \left[ X - \sqrt{X^2 - 4 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \right]$$



- 10. Bande élémentaire, de longueur quelconque, parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.

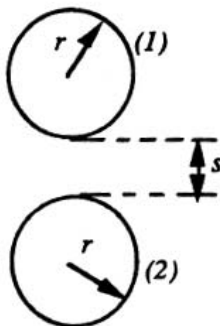
$$X = \frac{x}{r} \quad Y = \frac{y}{r}$$

$$f_{21} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$



- 11. Bande de largeur finie, de longueur infinie, parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.

$$f_{12} = \frac{r}{b-a} \left[ \arctg \frac{b}{c} - \arctg \frac{a}{c} \right]$$



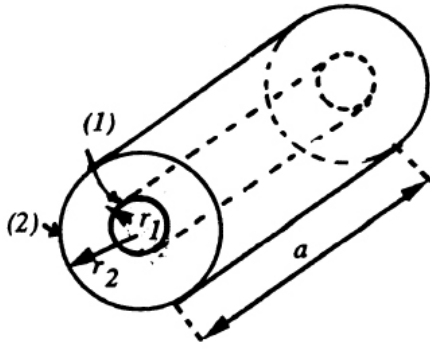
- 12. Cylindres infiniment longs d'axes parallèles et de même diamètre.

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{X^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{X} - X \right]$$

# Contrôle thermique

- 13. 2 cylindres concentriques de même longueur finie  $a$ .



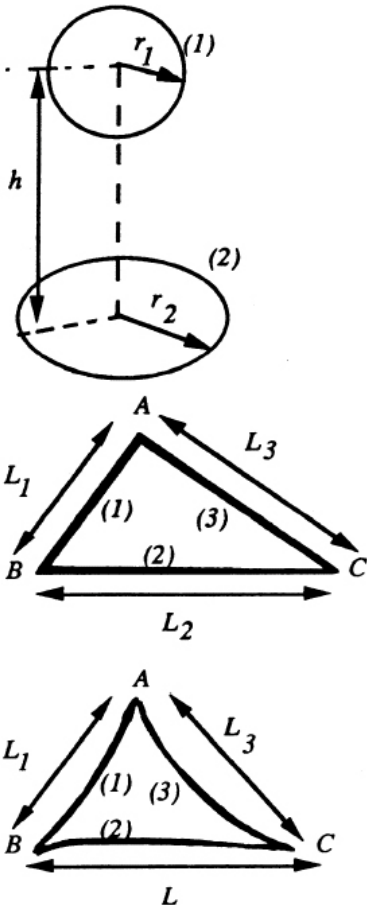
$$R = \frac{r_2}{r_1} \quad L = \frac{a}{r_1}$$

$$A = L^2 + R^2 - 1 \quad B = L^2 - R^2 + 1$$

$$f_{21} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\pi R} \left\{ \arccos \frac{B}{A} - \frac{1}{2L} [\sqrt{(A+2)^2 - (2R)^2} \arccos \frac{B}{RA} + \text{Barcsin} \frac{1}{R} - \frac{\pi A}{2}] \right\}$$

$$f_{22} = 1 - \frac{1}{R} + \frac{2}{\pi R} \arctg \left[ \frac{2\sqrt{R^2-1}}{L} \right] - \frac{L}{2\pi R} \left\{ \frac{\sqrt{4R^2+L^2}}{L} \arcsin \left[ \frac{A(R^2-1) + (L^2/R^2)(R^2-2)}{L^2 + 4(R^2-1)} \right] - \arcsin \frac{R^2-2}{R^2} + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\sqrt{4R^2+L^2}}{L} - 1 \right] \right\}$$

avec pour tout argument  $\zeta$  :  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \zeta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \arccos \zeta \leq \pi$



- 14. Sphère de rayon  $r_1$  et disque de rayon  $r_2$ , de même axe.

$$R_2 = \frac{r_2}{h}$$

$$f_{12} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+R_2^2}} \right]$$

- 15. Prismes de longueur infinie, de section droite triangulaire. Les côtés AB, BC et AC peuvent être rectilignes ou curvilignes mais convexes (vers l'intérieur de l'enceinte). Il vient :

$$f_{11} = f_{22} = f_{33} = 0$$

Compte tenu des relations d'enceinte et de réciprocité, on trouve :

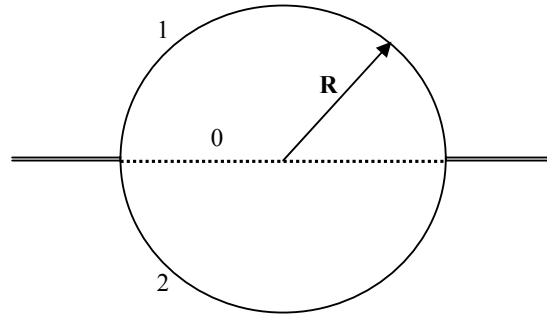
$$f_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}$$

$f_{13}, f_{23}$  se déduisent de  $f_{12}$  par changement des indices.

Conc

## Technique de la surface fictive :

Il est quelquefois intéressant pour calculer un facteur de vue d'imaginer une surface fictive intermédiaire (généralement convexe, ce qui crée une relation supplémentaire). Prenons un exemple simple ; soit à calculer les facteurs de vue entre deux demi cylindres de rayon R.



A priori, il faut calculer  $f_{12}$  et  $f_{11}$ . Nous ne disposons en fait que d'une relation non triviale :  $f_{12} + f_{11} = 1$ . Il reste une inconnue. Soit la surface fictive 0. On a alors les facteurs de vue  $f_{11}$  et  $f_{12}$  à calculer, liés par :

$$f_{11} + f_{10} = 1$$

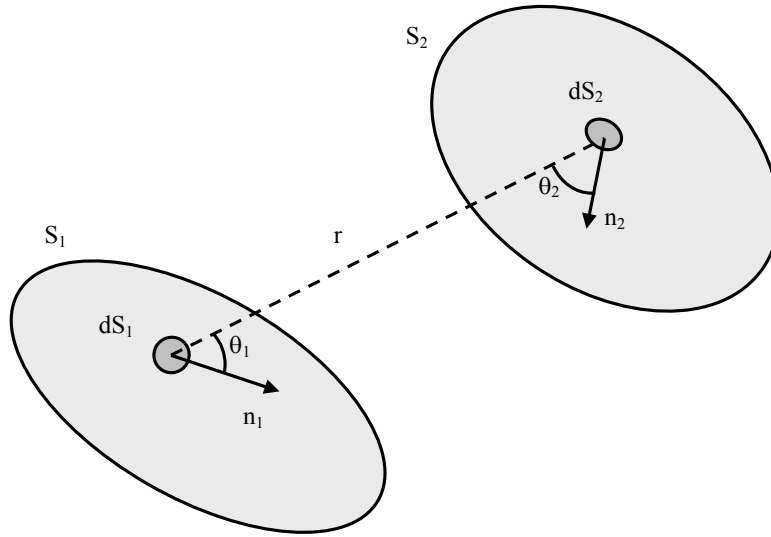
$$f_{01} = 1$$

$$f_{10} = \frac{S_0}{S_1} f_{01} = \frac{S_0}{S_1} = \frac{2}{\pi}$$

# Contrôle thermique

Facteurs de vue différentiels – Technique de calcul

Considérons le système constitué par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  en regard et les éléments différentiels  $dS_1$  et  $dS_2$ .



On peut définir différents facteurs de vue :

a) de  $dS_1$  vers  $dS_2$ , noté  $f_{dS_1, dS_2}$  :

$$dS_1 \cdot df_{dS_1, dS_2} \cdot \pi \cdot L_{1\lambda} d\lambda = L_{1\lambda} \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_2}{r^2} d\lambda$$

soit,

$$df_{dS_1, dS_2} = \frac{1}{\pi} \cos \theta_1 d\Omega_{12} \text{ avec } d\Omega_{12} = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r^2}$$

b) de  $dS_1$  vers  $S_2$ , noté  $f_{dS_1, S_2}$  :

$$f_{dS_1, S_2} = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{dS_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{r^2}$$

c) de  $S_1$  vers  $dS_2$ , noté  $f_{S_1, dS_2}$  :

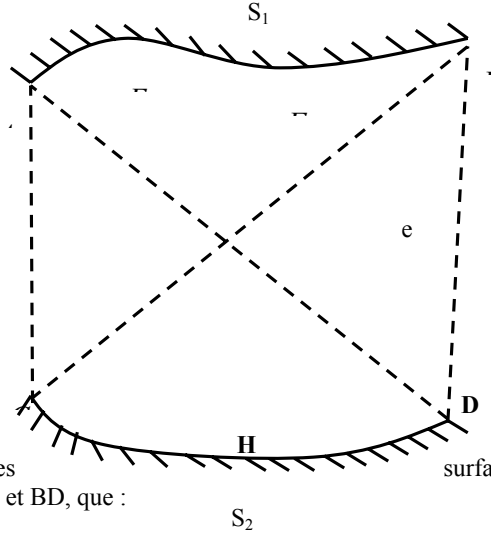
$$f_{S_1, dS_2} = \frac{dS_2}{\pi \cdot S_1} \int_{S_1} \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2}$$

d) de  $S_1$  vers  $S_2$ , noté  $f_{S_1, S_2}$  :

$$f_{S_1, S_2} = \frac{1}{\pi S_1} \int_{S_1} dS_1 \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2}$$

## Hottel : Méthode des droites croisées

La méthode se généralise à des cas beaucoup plus complexes : un exemple classique est la méthode des cordes croisée de Hottel. On considère les facteurs de vue entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  cylindriques, de génératrices parallèles à  $Oz$ , mais de coupes perpendiculaires à  $Oz$  quelconques, représentés sur la figure ci-dessous.



On démontre en utilisant différentes longueurs des cordes AD, BC, AC et BD, que :

surfaces fictives, et en introduisant les

- ❖ Triangle ABC où AB est remplacé par une surface concave notée  $S_{1'}$  :

$$Y_{1',AC} = \frac{S_{1'} + AC - CB}{2}$$

- ❖ Triangle ABD :

$$Y_{1',BD} = \frac{S_{1'} + BD - AD}{2}$$

Si  $1'$  est convexe vers la cavité :

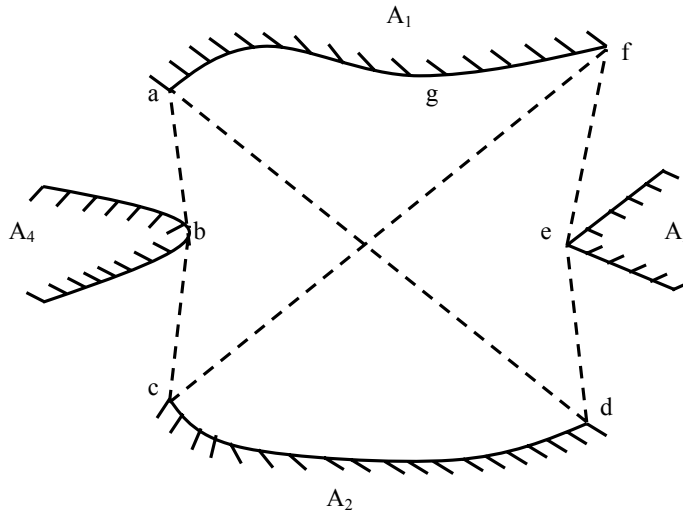
$$Y_{1',AC} + Y_{1',BD} + Y_{1',2} = S_1$$

On a donc

$$Y_{1',2} = S_1 - \frac{S_{1'} + AC - CB}{2} - \frac{S_{1'} + BD - AD}{2} = \frac{AD + CB - (AC + BD)}{2}$$

$$\boxed{Y_{21} = Y_{21'} = Y_{1'2} = Y_{12} = \frac{AD + CB - (AC + BD)}{2}}$$

# Contrôle thermique



Echange entre  $A_1$  et  $A_2$  lorsque  $A_3$  et  $A_4$  bloquent une partie du rayonnement échangé.

On suppose que  $A_1$  est concave  $\rightarrow$  afg (plan ou convexe)

abcfga a 3 côtés plans convexes :

$$A_{agf} F_{agf-abc} = \frac{A_{agf} + A_{abc} - A_{cf}}{2}$$

adefga a des côtés plan ou convexes :

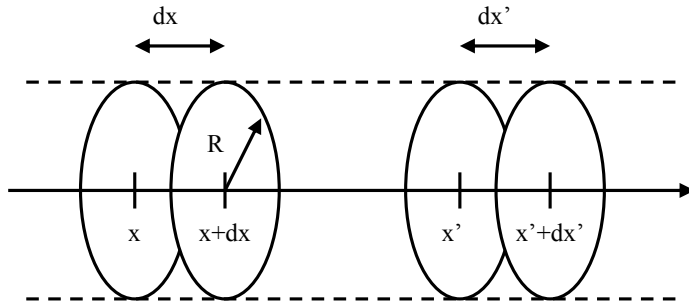
$$A_{agf} F_{agf-def} = \frac{A_{agf} + A_{def} + A_{ad}}{2}$$

$$F_{agf-abc} + F_{agf-2} + F_{agf-def} = 1 \Rightarrow A_{agf} F_{agf-2} = A_{agf} (1 - F_{agf-abc} - F_{agf-def})$$

$$\boxed{A_{agf} F_{agf-2} = \frac{(A_{cf} + A_{ad}) - (A_{abc} - A_{def})}{2}}$$

# Contrôle thermique

Les facteurs de vue différentiels se déduisent souvent facilement des facteurs de forme globaux. Prenons un exemple ; soit à calculer, à l'intérieur d'un tube, le facteur de vue entre deux segments cylindriques élémentaires de largeur  $dx$  et  $dx'$ , noté par commodité  $f_{dx, dx'}$ . Supposons connaître le facteur de vue  $f_{z, z'}$  entre les deux disques de rayon  $R$ , centrés en  $x$  et  $x'$  respectivement. On a de manière évidente :



$$df_{x, dx'} = f_{x, x'} - f_{x, x'+dx'}$$

$$df_{x, dx'} = \frac{\partial}{\partial x'} f_{x, x'} dx'$$

Donc à partir de la réciprocité :

$$\pi R^2 \cdot f_{x, dx'} = 2\pi R \cdot dx \cdot f_{dx', x}$$

$$f_{dx', x} = \frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial x'} f_{x, x'}$$

Pour un cylindre de forme quelconque :

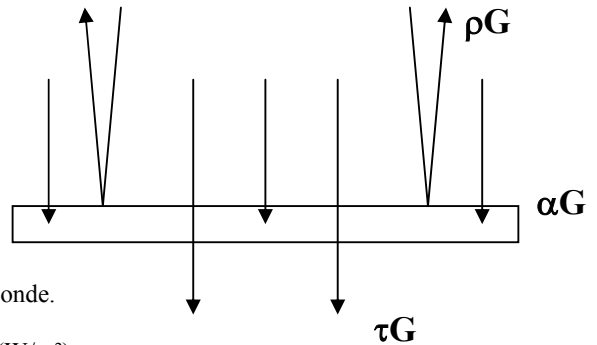
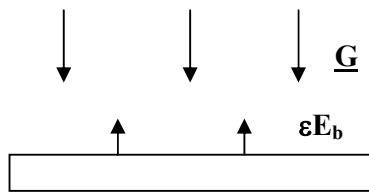
$$A(x') \cdot f_{x, dx'} = dA(x') \cdot f_{dx', x}$$

$$f_{dx', x} = - \frac{A(x')}{\left[ \frac{\partial A(x')}{\partial x'} \right]} \frac{\partial}{\partial x'} f_{x, x'}$$

## Echange radiatif entre corps gris, opaques ou diffus (lambertiens)

Pour rendre les calculs réalisable à la main (ou à la machine), nous allons faire les hypothèses suivantes\* :

- On idéalise les corps réels par des corps gris (lambertien), dont la réflectivité et l'absorptivité est indépendante vis-à-vis de la longueur d'onde.
- Les propriétés  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont définies sur deux domaines de spectre : le visible (pour le rayonnement solaire et albédo) et l'infrarouge (pour le rayonnement thermique). Ces propriétés sont dépendantes de la température (un calcul itératif se révèle donc nécessaire).
- Ces propriétés sont uniforme sur les surfaces.
- On considère le rayonnement qui atteint la surface comme isotrope.



- G** Irradiation du corps (Eclairage, en optique) ( $W/m^2$ )  
Energie totale hémisphérique venant sur la surface par seconde.
- J** Radiosité du corps (Luminance ou Emittance en optique) ( $W/m^2$ )  
Energie totale hémisphérique émise par seconde et par  $m^2$  de surface.
- $E_b$**  Energie qu'émettrait un corps noir à la même température
- $\varepsilon$**  Espèce d'émissivité globale intégrée sur tous les angles.  
Un corps émet toujours moins qu'un corps noir : corps gris ( $\varepsilon < 1$ ).

$$J = \varepsilon E_b + \rho G$$

- $\rho$**  Réflectivité de la surface intégrée sur tous les angles.
- $\alpha$**  Absorptivité de la surface intégrée sur tous les angles.
- $\tau$**  Transparence de la surface intégrée sur tous les angles.  
Lorsque  $\tau=0$ , le corps est opaque.

$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

# Contrôle thermique

La différence entre ce que le corps émet et reçoit à sa surface est :

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{émis}} = J - G = \varepsilon E_b + (\rho - 1)G = \varepsilon E_b + \alpha G$$

Le rayonnement thermique d'un corps suit la règle de Prevost : si deux corps absorbent, à une même température, différentes quantités d'énergie, leur rayonnement thermique à cette température doit être différent. Le corps noir est donc celui qui absorbe et émet le plus de rayonnement.

La loi de Kirchhoff précise cette relation

*Loi de Kirchhoff*

L'émissivité d'un corps quelconque pour une longueur d'onde donnée, une polarisation donnée et un angle solide donné dans une direction donnée est un nombre adimensionnel qui représente le rapport entre l'énergie émise par l'échantillon et celle d'un corps noir :

$$\varepsilon(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi) = \frac{L_{\lambda, e}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi) \cos\theta \, d\omega \, d\lambda_{\pm}}{L_{\lambda, b}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi) \cos\theta \, d\omega \, d\lambda_{\pm}} = \frac{L_{\lambda, e}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi)}{L_{\lambda, b}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi)}$$

L'absorption spectrale et directionnelle, représente la proportion d'énergie qui sera absorbée par le corps pour une longueur d'onde, une polarisation et une direction données :

$$\alpha(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi) = \frac{L_{\lambda, \text{absorbé}}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi)}{L_{\lambda, \text{incident}}(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi)}$$

Sur base d'un équilibre thermodynamique, Kirchhoff démontre que :

$$\varepsilon(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi) = \alpha(\lambda_{\pm}, \theta, \varphi)$$

Cette égalité entre l'émissivité et l'absorptivité spectrales et directionnelles est rigoureuse et n'est soumise à aucune restriction si ce n'est l'équilibre thermique. C'est la forme générale de la loi de Kirchhoff.

W.C Snyder, Z. Wan et X ? Li (Applied Optics 37, 16, 1998, 3464-3470) prétendent que la loi de Kirchhoff et la propriété de réciprocité de la réflectance ne peuvent se démontrer sur base de la conservation de l'énergie. En fait, ces propriétés conduisent bien à la conservation de l'énergie mais ce ne sont pas les seules possibilités respectant la conservation de l'énergie c'est-à-dire qu'on peut avoir conservation de l'énergie et violation des lois de Kirchhoff et de réciprocité de la BRDF (fonction de distribution bidirectionnelle de la réflectivité). Il existerait d'ailleurs des matériaux (ou scènes terrestres boisées observées par satellites) pour lesquels ces propriétés ne sont pas vérifiées. Par contre, la réciprocité de la BRDF et l'équivalence de l'absorptivité et de l'émissivité directionnelles spectrales sont cependant vérifiées pour la majorité des corps ou structures (en l'absence de champ magnétique intense), qui sont invariants vis-à-vis de l'inversion du temps, ce qui est habituellement vérifié. Cela semble aussi indiquer qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir l'équilibre thermique pour que ces propriétés soient vérifiées. Ceci est fondamental pour les applications où l'équilibre thermique n'est pas vérifié.

Qu'en est-il pour les émissivités, absorptivités intégrées ?

Démonstration habituellement trouvée dans les bouquins : en plaçant successivement, dans une enceinte noire, un échantillon puis un corps noir de même forme, on déduit comme que :

$$\varepsilon_{\text{intégré}} = \alpha_{\text{intégré}}$$

# Contrôle thermique

Que signifie cette égalité ? Si l'émissivité est une propriété intrinsèque d'une surface, l'absorption elle par contre (à l'exclusion de l'absorptivité directionnelle spectrale) ne l'est pas : elle dépend des propriétés intrinsèque de la surface mais aussi du rayonnement incident ; il est par conséquent douteux qu'il y ait égalité entre les émissivités et les absorptivités intégrées. L'égalité que nous venons de démontrer n'est correcte que pour une absorptivité dans un flux isotrope d'enceinte de corps noir.

*Quelques exemple simples où Kirchoff Global n'est pas vérifié*

Considérons l'échange entre deux surfaces  $S_s$  et  $S_r$  :

$$\alpha_{\text{récepteur}}(T_{\text{source}}, T_{\text{récepteur}}) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda r}(T_r) E_b(T_s) F_{sr} d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda}(T_s) F_{sr} d\lambda}$$

$$\alpha_r(T_s, T_r) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_r) \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) F_{sr} d\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) F_{sr} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_r) \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) d\lambda}$$

1) Si  $T_s = T_r$  et si les surfaces sont des corps gris (ou noir) :

$$\varepsilon_{\lambda}(T_s) = \varepsilon(T_s)$$

$$\alpha_r(T_s, T_r) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(T_r) \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_b(\lambda, T_s) d\lambda} = \varepsilon(T_r)$$

Dans ce cas Kirchoff global est vérifié.

# Contrôle thermique

- 2) Si  $\alpha_\lambda(T)$  ne dépend pas de  $T$  et la source est 'grise' :

$$\alpha_r(T_s, T_r) = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda E_b(\lambda, T_s) d\lambda}{\int_0^\infty E_b(\lambda, T_s) d\lambda} = \varepsilon_r(T_s)$$

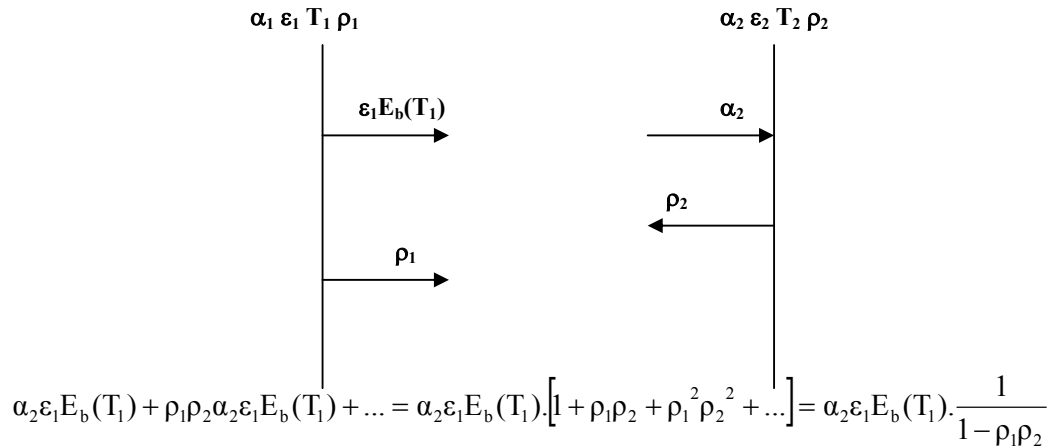
Kirchhoff n'est pas vérifié mais on n'est pas en équilibre thermique.

- 3) Si la source est un corps gris et le récepteur un métal

$$\alpha = \varepsilon(T_m) \quad \text{avec } T_m = \sqrt{T_s T_r}$$

# Contrôle thermique

Exemple : Echange entre 2 plans gris infinis à  $T_1$  et  $T_2$



On trouve le flux net :

$$\frac{(q_{1 \rightarrow 2})_{net}}{A_1} = \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{A_1} - \frac{q_{2 \rightarrow 1}}{A_1} = \frac{\epsilon_1 \alpha_2 E_b(T_1)}{1 - \rho_1 \rho_2} - \frac{\epsilon_2 \alpha_1 E_b(T_2)}{1 - \rho_1 \rho_2}$$

Si  $\alpha$  est dans l'infrarouge, on pourra faire l'hypothèse des thermiciens :  $\alpha = \epsilon$ . Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{(q_{1 \rightarrow 2})_{net}}{A_1} = \frac{E_b(T_1) - E_b(T_2)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Si  $\alpha \neq \epsilon$  :

$$\frac{(q_{1 \rightarrow 2})_{net}}{A_1} = \frac{\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} E_b(T_1) - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} E_b(T_2)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1}$$

**C'est compliqué pour un problème à géométrie simple !**

**⇒ Autre méthode plus rapide :**

**Schéma électrique équivalent**

# Contrôle thermique

Schéma électrique équivalent

Nous allons tout d'abord exprimer le flux  $\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{émis}}$  en fonction de  $E_b$  et de la radiativité  $J$ .

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{émis}} = J - G$$

or

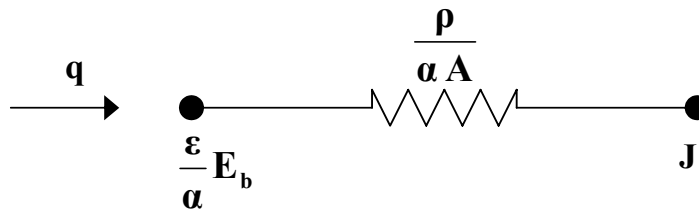
$$J = \varepsilon E_b + \rho G \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{\rho}(J - \varepsilon E_b)$$

On obtient donc

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{émis}} = J - \frac{1}{\rho}(J - \varepsilon E_b) = \frac{\varepsilon}{\rho} E_b - \frac{\alpha}{\rho} J$$

$$\boxed{\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{émis}} = \frac{\frac{\varepsilon}{\rho} E_b - J}{\frac{\rho}{\alpha A}}}$$

On en déduit le schéma électrique équivalent :



Si on fait l'hypothèse de corps gris :

$$\frac{\rho}{\alpha A} = \frac{1 - \alpha}{\alpha A} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon A}$$

Soit deux surface  $A_1$  et  $A_2$ , parmi plusieurs autres. La quantité d'énergie qui quitte la surface  $A_1$  pour atteindre  $A_2$  est  $J_1 A_1 F_{12}$  (par définition du facteur géométrique  $F_{12}$ ). Réciproquement, la quantité d'énergie quittant la surface  $A_2$  pour atteindre  $A_1$  vaut  $J_2 A_2 F_{21}$ . Par réciprocité de l'optique, on a :

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

Le facteur de vue est un paramètre purement géométrique :

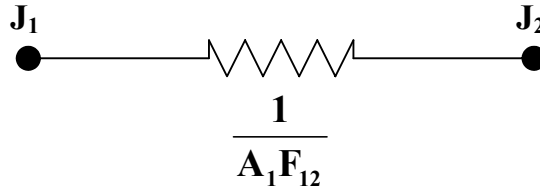
$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j$$

# Contrôle thermique

La quantité d'énergie nette échangée entre les deux surface vaut donc :

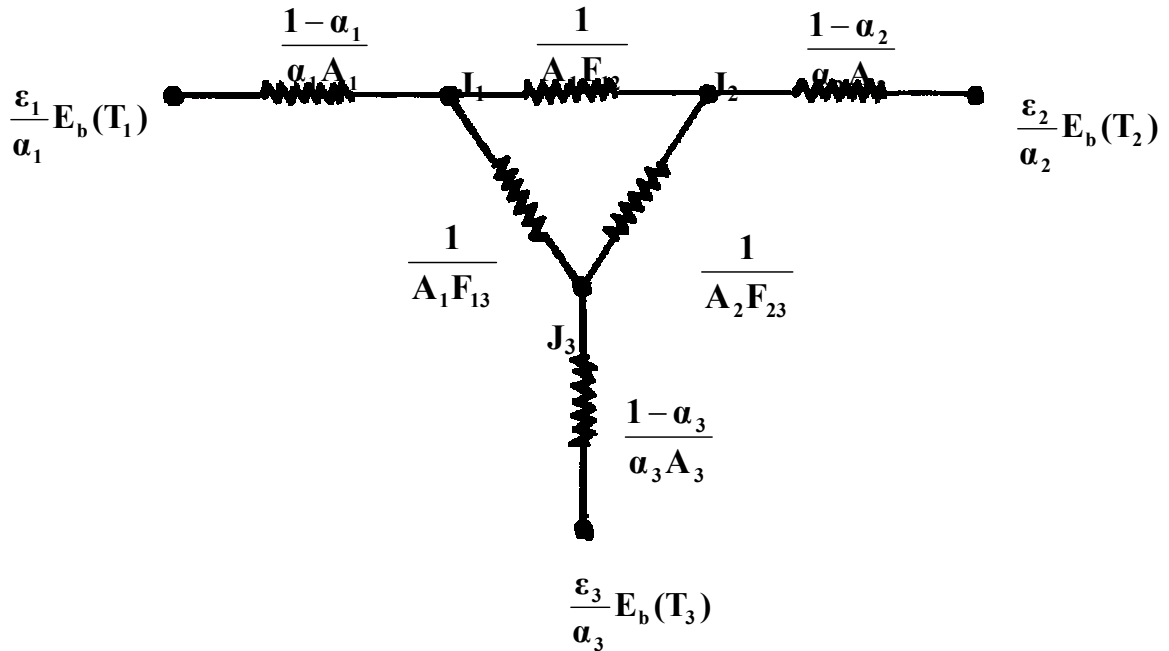
$$q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}}$$

Le schéma électrique équivalent correspondant est donc



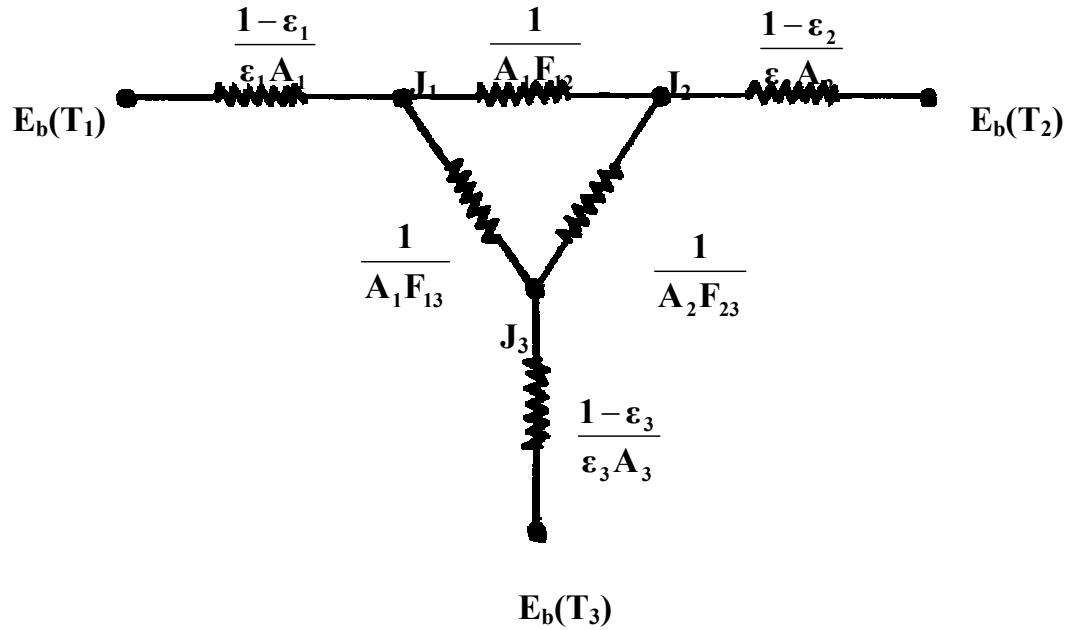
Si on suppose que toutes les caractéristiques thermiques sont constantes, le problème est linéaire en  $E_b$  (ou  $T^4$ ) et on peut utiliser la théorie des réseaux électriques (le théorème de Norton-Thevenin, réseau réduit aux bornes actives,...) ou celles des « Bond graphs » éventuellement.

$$[J], [E_b], \left[ \frac{\varepsilon}{\alpha} E_b \right] = W.m^{-2} \quad [q] = W \quad [R] = m^{-2} \quad [\Delta J] = [R].[q]$$



# Contrôle thermique

Dans l'hypothèse (souvent faite) où  $\varepsilon = \alpha^*$ , on a le schéma suivant :



Quand une camera thermographique regarde une surface  $\rho, \varepsilon, T$ , elle mesure la radiosité de la surface :  
 $J = \varepsilon E_b + \rho G$ .

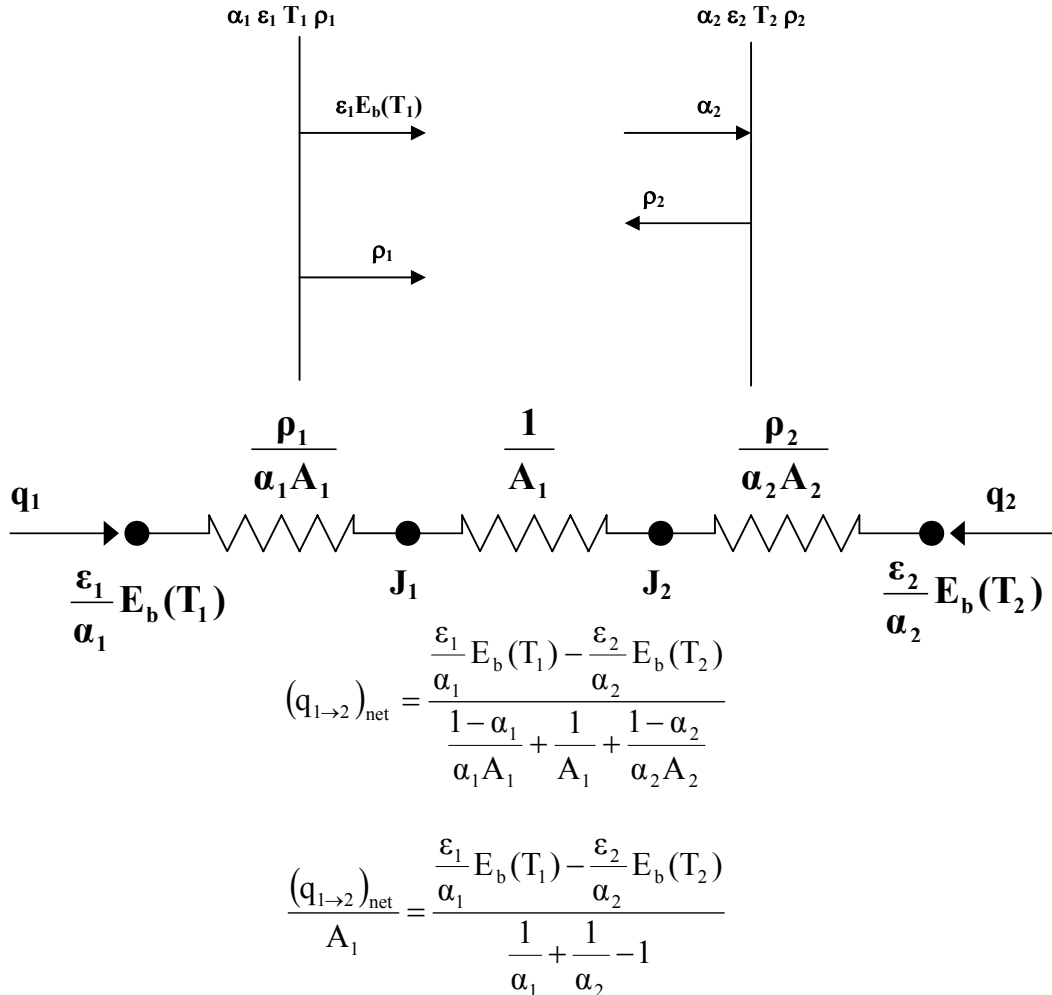
- La camera permettra donc de scruter  $J_1, J_2, J_3, J_4, \dots$
- En principe, les résistances entre les  $J$  sont connues simplement par la connaissance de la géométrie.
- Si des thermoscopes mesure la température des surfaces, on peut déduire les  $\alpha$  de ces surfaces.
- Si les propriétés thermo-optiques des surfaces sont connues, on peut déduire les températures des surfaces.

**⇒ Tous les composants sont connus**

# Contrôle thermique

\*Cette hypothèse est si fréquente que dans la documentation ESA,  $\varepsilon$  représente  $\varepsilon = \alpha$  (infrarouge) et  $\alpha$  représente  $\alpha = \varepsilon$  (visible, solaire).

Exemple précédent, au moyen du schéma électrique équivalent



Quelques commentaires sur cette formule, où n'a pas fait l'hypothèse  $\varepsilon_1 = \alpha_1$  et  $\varepsilon_2 = \alpha_2$  :

- Quand  $T_1 = T_2$ , on ne devrait pas avoir de flux !

$$\frac{\varepsilon_1(T_1)}{\alpha_1(T_1, T_1)} = \frac{\varepsilon_2(T_1)}{\alpha_2(T_1, T_1)}$$

- On ne peut pas avoir un flux du corps le plus froid vers le corps le plus chaud !  
Si  $T_1 > T_2$  :

$$\frac{\varepsilon_1(T_1)}{\alpha_1(T_1, T_2)} E_b(T_1) > \frac{\varepsilon_2(T_2)}{\alpha_2(T_2, T_1)} E_b(T_2)$$

# Contrôle thermique

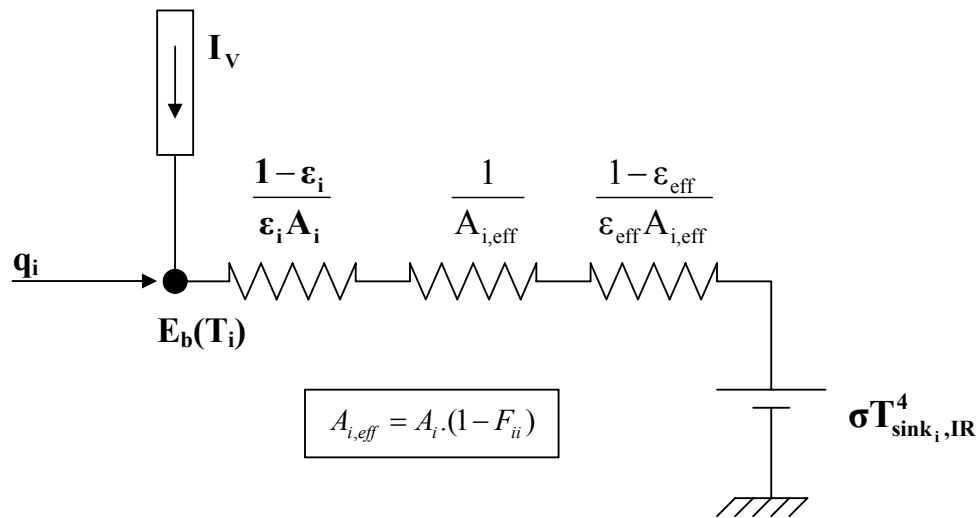
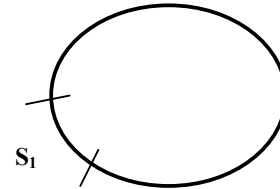
## Notion de température de puits et d'émissivité effective

Il s'agit de notions importantes dans le calcul thermique des expériences sur satellite. L'analyse thermique d'un satellite et des expériences scientifiques à son bord se fait de façon indépendante par le responsable du S/C pour le satellite et les différents expérimentateurs pour les expériences. La géométrie de l'expérience et les émissivités des surfaces extérieures sont fournies à l'ESA ainsi qu'un modèle mathématique thermique. Après quelques mois, celle-ci nous envoie de retour pour chaque surface extérieure de l'expérience, une température de puits et une émissivité équivalente.

En fait, ces notions nous permettent de définir les conditions aux limites extérieures de l'expérience que ce soit pour les calculs ou pour les tests au niveau instrument.

La surface  $S_1$  échange avec l'environnement extérieur comme si cette surface  $S_1$  ne voyait qu'une seule surface d'émissivité  $\epsilon_{\text{eff}}$  et à la température  $T = T_{\text{sink}}$  avec un facteur de vue  $F = 1 - F_{11}$ .

Ceci est vrai en l'absence de flux solaire (« visible ») absorbé, dans ce cas  $T_{\text{sink}}$  ne dépend pas de  $\epsilon_1$ . En présence d'un flux solaire, on peut ajouter un injecteur de courant équivalent au flux visible absorbé.



### Définition :

$T_{\text{sink}}$  d'une surface est la température d'équilibre de cette surface isolée en interne, en équilibre avec l'environnement externe à l'expérience (satellite, espace froid, flux solaire, albédo de la Terre, chauffettes externes, ...).

1. Si  $q_i = 0 \rightarrow T_i = T_{\text{sink } i}$  est la température d'équilibre face à l'environnement extérieure.
2. Si  $T_i = 0 \rightarrow q_i = q_{\text{sink } i}$

$$q_{\text{sink}} = \frac{\omega(T_{\text{sink}}^4 - 0^4)}{R} \quad \text{où} \quad R = \frac{\sigma T_{\text{sink}}^4}{q_{\text{sink}}} = \frac{1 - \epsilon_{\text{eff}}}{\epsilon_{\text{eff}} A}$$

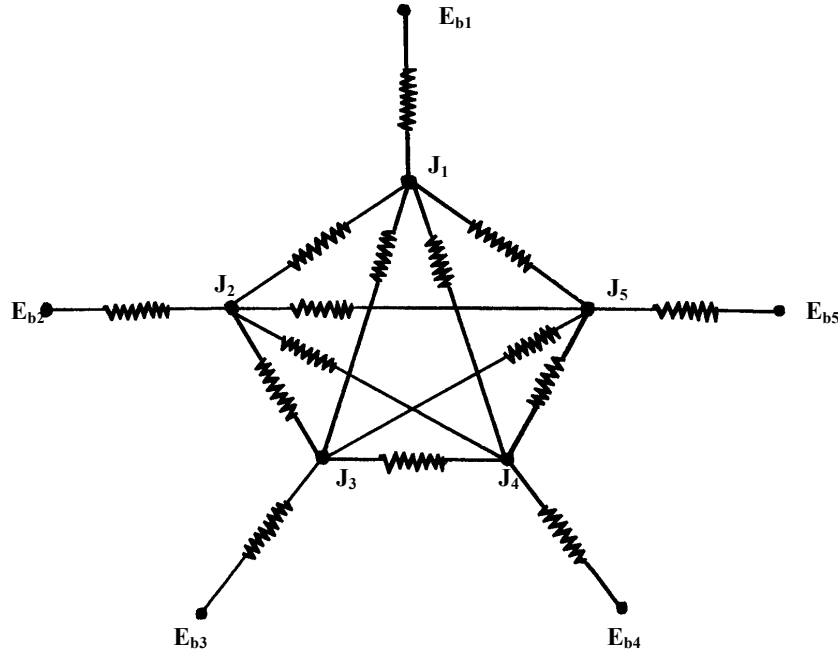
**ATTENTION :** Ceci n'est correcte que si le problème est linéaire (en  $T^4$  et  $q$ ), mais  $\epsilon_i$  dépend en général de la température. Il faut alors définir les paramètres de puits proches des température réellement rencontrée.

Dans la pratique il est très difficile d'imposer un température de 0K. Une autre méthode pour calculer  $R$  consiste à prendre  $q_i = q_{i2}$  proche de la réalité  $\rightarrow T_{i2}$ .

$$q_{i2} = \frac{\sigma(T_{i2}^4 - T_{\text{sink } i}^4)}{R}$$

## Radiosités $Y_{ij}$

Les réseaux thermiques définis à partir des facteurs de vue géométrique  $F_{ij}$  font apparaître en plus des nœuds physiques, correspondant aux degré de liberté du problème, des nœuds supplémentaires (un par surface non noire) qui représentent les nœuds de radiosité  $J_i$ .



Pour un système à  $n$  surface grise, il y a  $2n$  nœuds et  $C_{n+1}^2$  résistances.

L'objectif premier est d'éliminer les nœuds de radiosité pour aboutir à un réseau ne faisant intervenir que les  $n$  nœuds réels et, par conséquent, au maximum  $C_n^2$  résistances. Ces résistances finales s'appellent aussi radiosités :  $Y_{ij}$ .

Il existe plusieurs méthodes pour atteindre ce but :

- Connaissant  $F_{ij}$ , on calcule le réseau à simplifier manuellement.
- Connaissant  $F_{ij}$ , on calcule  $Y_{ij}$  algébriquement (par calcul matriciel ou Gebhardt).
- Par le calcul directe de  $Y_{ij}$  (méthodes plus modernes).

La théorie des réseaux électriques linéaires passifs nous apprend que :

- 1) Tout multipôle  $N$  à  $n$  accès des mailles indépendantes peut être formellement représenté par un schéma équivalent en polyèdre à  $n + 1$  sommets comportant  $C_n^2$  impédance (sans inductions mutuelles) réunissant tous les sommets deux à deux.

Il existe donc toujours une solution formelle susceptible d'être chiffrée (mais il faut se garder de penser que le schéma équivalent est toujours physiquement réalisable ! Par exemple  $Y_{ij}$  ( $i \neq j$ ) n'est pas toujours positif)

---


$$* n + C_n^2 = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$$

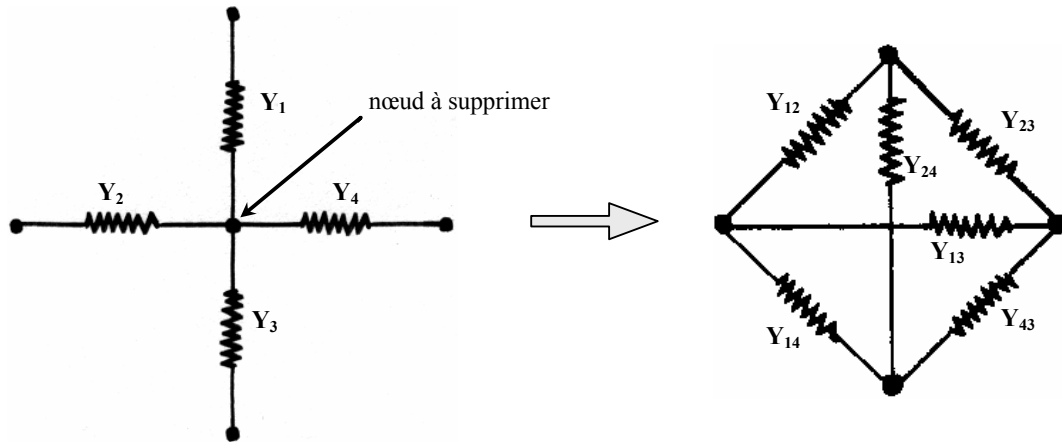
- 2) Il est toujours possible de transfigurer formellement une étoile sans impédances mutuelles en polyèdre. L'inverse n'est généralement pas possible. En effet, l'étoile à  $p$  branches contient  $p$  paramètres et le polyèdre à

# Contrôle thermique

$p$  sommets contient  $\frac{p(p-1)}{2}$  paramètres, or  $\frac{p(p-1)}{2} > p$  si  $p > 3$  (Cela marche donc pour  $p=3$ , c'est le cas de la transfiguration triangle-étoile).

La formule de Rosen (1924) donne :

$$Y_{ij} = \frac{Y_i Y_j}{\sum_k Y_k}$$



Mis sous cette forme polyédrique, le réseau fait apparaître des composants  $Y_{ij}$  que les thermiciens français appellent radiosités  $Y_{ij}$ .

$$q_{ij} = Y_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

avec  $Y_{ij} = Y_{ji}$  bien entendu, puisque c'est le même élément.

$Y_{ij}$  = conductance de radiosité entre le nœud  $i$  et le nœud  $j$ .

La détermination des ces radiosités  $Y_{ij}$  constitue la première étape des logiciel de calcul thermique. Ces logiciel n'utilisent généralement pas la 'méthode électrique' que nous venons de voir.

Il s'agit d'une méthode purement d'algèbre matricielle basée sur la forme particulière des équations thermiques et les propriétés des facteurs de vue.

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} ; \dots$$

Des méthodes plus puissantes basées sur le RayTracing et la méthode statistique de Monte Carlo calculent directement, plus rapidement et avec parfois plus de précision les radiosités (sans passer par les facteurs de vue).

$$q_{ij} = Y_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

# Contrôle thermique

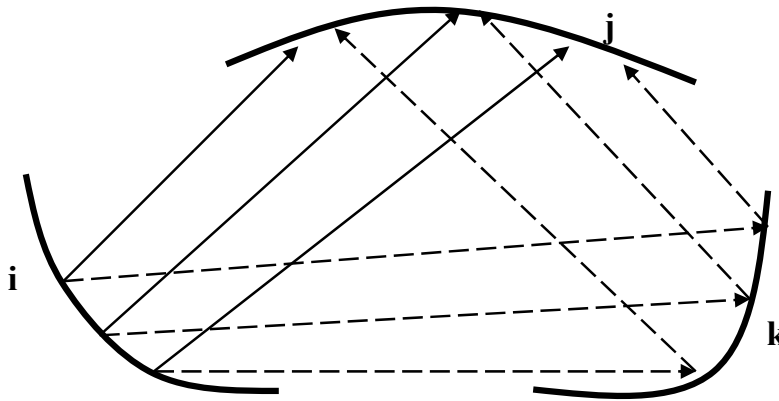
On peut vérifier les propriétés suivantes :

$$\sum_{j=1}^n Y_{ij} = \varepsilon_i A_i$$

Si on utilise la forme  $Y_{ij} = \varepsilon_i A_i B_{ij}$ , on peut écrire

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} = 1$$

où  $B_{ij}$  sont les facteurs d'absorption de GEBHARDT. Ils est défini comme la fraction du rayonnement 'propre' (par sa température) émis par la surface  $i$  et qui finalement après réflexion multiples par les autres surfaces est absorbé par la surface  $j$ . En général  $B_{ii} \neq 0$  ( $Y_{ii} \neq 0$ ).



Le faisceau réfléchi oublie d'où il vient ; c'est comme si le faisceau incident était entièrement absorbé dans un premier temps puis une partie est relâchée de façon lambertienne.

$$B_{ij} = F_{ij}\varepsilon_j + \sum F_{ik}(1 - \varepsilon_k)B_{kj}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}).\underline{\underline{B}} \quad \text{avec} \quad \beta_{ij} = F_{ij}\varepsilon_j$$

**Pour des réflexions diffuses !**

Question: Peut-on avoir  $B_{ij} \neq 0$  si  $F_{ij} = 0$  ? C'est-à-dire peut-il y avoir des échanges thermiques entre deux surfaces qui ne se voient pas ?

## Propriétés générales des facteur de Gebhard (pour des réflexions quelconques)

1)  $\boxed{\sum_j B_{ij} = 1}$

L'énergie émise par i finira par être absorbée.

2)  $\boxed{\varepsilon_i A_i B_{ij} = \varepsilon_j A_j B_{ji}}$

On considère uniquement les énergies émises par les surfaces i et j, par leur rayonnement propre, les autres surfaces jouant le rôle de distributeurs (absorbants partiellement et réfléchissants partiellement).

L'échange net entre i et j vaut :  $q_{i \rightarrow j} = \varepsilon_i A_i E_b(T_i) B_{ij} - \varepsilon_j A_j E_b(T_j) B_{ji}$

Lorsque  $T_i = T_j$ , cet échange doit être nul, sinon on parviendrait sans travail à faire transiter de l'énergie d'une surface à une autre de même température, ce qui est contraire aux principes de la thermodynamique.

$$\Rightarrow \varepsilon_i A_i B_{ij} = \varepsilon_j A_j B_{ji}$$

3) L'échange entre la surface i et la surface j s'écrit :

$$\begin{aligned} q_{i \rightarrow j} &= \varepsilon_i A_i \sigma T_i^4 B_{ij} - \varepsilon_j A_j \sigma T_j^4 B_{ji} \\ &= \varepsilon_i A_i B_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \\ &= \varepsilon_i A_i B_{ij} (E_{b,i} - E_{b,j}) \end{aligned}$$

### Propriété particulière dans les cas où toutes les réflexions sont diffuses

$$\boxed{B_{ij} = F_{ij} \varepsilon_j + \sum F_{ik} (1 - \varepsilon_k) B_{kj}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}) \underline{\underline{B}} \quad \text{avec} \quad \beta_{ij} = F_{ij} \varepsilon_j}$$

Démontrons que cette équation particulière vérifie bien les propriétés générales 1) et 2)

1) Equations des radiosités  $Y_{ij}$  pour des réflexions diffuses :

$$Y_{ij} = \varepsilon_i A_i B_{ij} = \varepsilon_i A_i F_{ij} \varepsilon_j + \sum \varepsilon_i A_i F_{ik} \varepsilon_k \left( \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \right) \frac{\varepsilon_k A_k}{\varepsilon_k A_k} B_{kj}$$

# Contrôle thermique

En posant

$$U_{ij} = \varepsilon_i A_i F_{ij} \varepsilon_j = U_{ji} \quad \text{et} \quad G = \text{diag} \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2 A} \right)$$

on peut écrire

$$Y_{ij} = U_{ij} + \sum_k U_{ik} G_{kk} Y_{kj}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{Y}}$$

$$U = U^T ; G = G^T \Rightarrow Y = Y^T \quad \text{car} \quad Y = U + UGU + UGUGU + \dots$$

On constate que tous les termes sont symétriques.

2)  $\sum_j B_{ij} = 1$  ?

ou  $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}$  ? où le vecteur  $\underline{\underline{u}}$  est tel que  $u_i = 1 \quad \forall i$

On sait que  $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} \quad \left( \sum_j F_{ij} = 1 \quad \forall i \right)$

On peut le démontrer à partir de la théorie des déterminants, mais nous allons utiliser une démonstration plus élégante :

Hypothèse :

$$\underline{\underline{B}} = \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\beta}} \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{\beta}}$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}$$

$$u_i = 1 \quad \forall i$$

Thèse :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}$$

Démonstration :

$$\underline{\underline{\beta}} = \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\beta}} \right) - \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} \right)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}} - \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\beta}} \right)^{-1} \cdot \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} \right)$$

pour des réflexions diffuses

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} - \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\beta}} \right)^{-1} \cdot \left( \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{u}} \right)$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} \quad \text{CQFD}$$

# Contrôle thermique

Remarques :

Si on résoud par une méthode itérative, la solution approchée ne vérifiera pas la relation  $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}) \cdot \underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} \cong [\underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}) \cdot \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}})^2 \cdot \underline{\underline{\beta}} + \dots] \cdot \underline{\underline{u}} \neq \underline{\underline{u}} \text{ à tout ordre, car}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} - (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\beta}})^{-1} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}) \cdot \underline{\underline{u}} \quad \text{or } (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}) \cdot \underline{\underline{u}} \neq 0$$

Il faudra donc s'arranger pour que la méthode numérique (approchée) utilisée préserve les propriétés de symétrie et de conservation de l'énergie !

Annexe 1 :

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{Y}}$$

$$\underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} = \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} + \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2}$$

$$\underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} = [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2}]^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2}$$

$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{G}}^{-1/2} [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2}]^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1/2}$  qui est symétrique ; ceci pourrait convenir comme méthode numérique.

## ANNEX 2 : DEFINITION OF VIEW FACTORS AMONG NON-LAMBERTIAN SURFACES (IN PRESENCE OF PARTLY SPECULAR / PARTLY DIFFUSE SURFACES)

The purpose of this paragraph is to generalize the notion of view factor and to define the specular view factor, when all the surfaces satisfy the usual assumptions which allows hand calculations (ref 5):

1. each surface is isothermal
  2. each surface is a gray body
  3. each surface is a diffuse emitter
  4. each surface is a diffuse reflector
  5. the radiosity is uniformly distributed across each surface
- except 4 which is relaxed and replaced by a more general condition:  
4'. each surface is a partly diffuse / partly specular reflector.

So we want to extend the analysis of view factors and Gebhart factors to take into account some simple geometry's containing surfaces that emit radiation diffusely but that may reflect radiation partly in a specular manner and partly in a diffuse manner.

For each surface, we take the reflectivity to be the sum of a specular component and a diffuse component:

$$\rho_d + \rho_s + \alpha = 1$$

$$\alpha = \varepsilon$$

as it is assumed that global Kirchhoff's identity still applies.

$G$  represents the heat irradiation of the surface (total radiation energy incident upon a surface per unit time and per unit area),  $E_b$  the black-body radiation,  $J_d$  the diffuse radiosity of the surface (total radiation energy which leaves a surface per unit time and per unit area); so the net diffuse heat exchange and the diffuse radiosity read:

$$\begin{aligned} q &= A \cdot (\varepsilon \cdot E_b - \alpha \cdot G) \\ J_d &= (\varepsilon \cdot E_b + \rho_d \cdot G) \text{ or } G = \frac{1}{\rho_d} \cdot (J_d - \varepsilon \cdot E_b) \\ q &= A \cdot \left[ \varepsilon \cdot E_b - \frac{\alpha}{\rho_d} \cdot (J_d - \varepsilon \cdot E_b) \right] \\ &= \frac{\varepsilon \cdot A}{\rho_d} \cdot [E_b \cdot (1 - \rho_s) - J_d] \\ q &= \frac{E_b - \frac{J_d}{(1 - \rho_s)}}{\frac{\rho_d}{\varepsilon \cdot A \cdot (1 - \rho_s)}} \end{aligned}$$

which can be represented by the following network element:

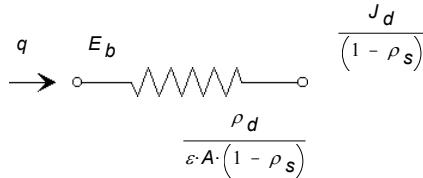


Fig. (1.) Network element with specular/diffuse reflectivities.

We now only consider diffuse exchanges between two surfaces 1 and 2:

$$\begin{aligned} q_{1 \rightarrow 2, d} &= J_{1, d} \cdot A_1 \cdot F_{12} \cdot (1 - \rho_{2, s}) \cdot \frac{(1 - \rho_{1, s})}{(1 - \rho_{1, s})} \\ q_{2 \rightarrow 1, d} &= J_{2, d} \cdot A_2 \cdot F_{21} \cdot (1 - \rho_{1, s}) \cdot \frac{(1 - \rho_{2, s})}{(1 - \rho_{2, s})} \\ q_{12}^{net} &= \frac{\frac{J_{1, d}}{(1 - \rho_{1, s})} - \frac{J_{2, d}}{(1 - \rho_{2, s})}}{A_1 \cdot F_{12} \cdot (1 - \rho_{1, s}) \cdot (1 - \rho_{2, s})} \end{aligned}$$

which can be represented by the following equivalent network element:

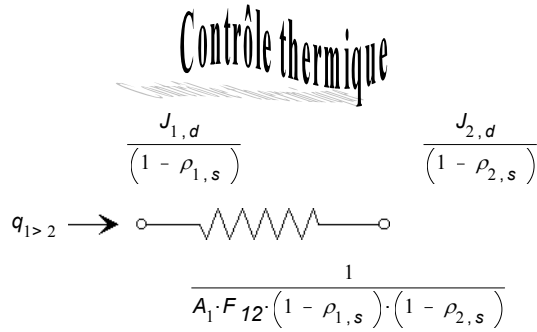


Fig. (2.) Equivalent network element for 2 surfaces with specular/diffuse reflectivities.

So the complete radiation heat transfer can be translated into an equivalent electrical network making use of the two precedent types of network element. The only additional adaptation is the replacement of the usual view factor by a specular view factor.

Indeed, in presence of partly specular surfaces, the notion of view factor must be modified. To define the notion of specular view factor in a system of partly diffuse/partly specular surfaces, we imagine in a first step that the diffuse part of the reflectivity of a surface acts as an absorber so that in a first step, there are only specular reflections, the diffused part of it is considered as absorbed and will be emitted later on, as a Lambertian emitter. In this situation,  $F_{ij}^s$  represents the proportion of the energy diffusely emitted by surface  $i$  which after multiple specular reflections on the other surfaces, will finally be absorbed by surface  $j$ .

$$F_{ij}^s = F_{ij} + \sum_{l, \text{specular}} F_{i(j,l)} \cdot \rho_{l,s} + \sum_{lm, \text{specular}} F_{i[(j,l),m]} \cdot \rho_{l,s} \cdot \rho_{m,s} + \dots$$

where  $[(j, \dots), l), m]$  represents the image in the partly specular surface  $m$  of the image in the partly specular surface  $l$ , of the image in ... of the partly diffusely reflecting or absorbing surface  $j$ .

The method which is used only consider net heat exchanges in a world exclusively composed of the diffuse or absorptive parts of the surfaces and their images; the specular part of the surfaces only makes images.

So, each surface  $i$  has an effective area of

$$(1 - \rho_{i,s}) \cdot A_i$$

The view factors between diffuse surfaces (including their images) become:

$$F_{ij} \cdot (1 - \rho_{j,s}) \quad \text{or} \quad F_{ij}^s \cdot (1 - \rho_{j,s})$$

In this world of non specular surfaces and their images, we can redefine the absorption coefficients and the diffuse reflectivity's as

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= \frac{\alpha_i}{(1 - \rho_{i,s})} \\ \rho_{i,d}' &= 1 - \alpha_i' = \frac{\rho_{i,d}}{(1 - \rho_{i,s})} \\ F_{ij}' &= F_{ij} \cdot (1 - \rho_{j,s}) \\ F_{ij}^{s'} &= F_{ij}^s \cdot (1 - \rho_{j,s}) \\ A_i' &= (1 - \rho_{i,s}) \cdot A_i \end{aligned}$$

In this new world, we can apply the usual equations corresponding to a system of gray diffuse surfaces (conditions 1-4 are now verified).

$$\begin{aligned} A_i' \cdot F_{ij}' &= A_j' \cdot F_{ji}' \quad \text{or} \\ (1 - \rho_{i,s}) \cdot A_i \cdot F_{ij} \cdot (1 - \rho_{j,s}) &= (1 - \rho_{j,s}) \cdot A_j \cdot F_{ji} \cdot (1 - \rho_{i,s}) \\ A_i' \cdot F_{ij}^{s'} &= A_j' \cdot F_{ji}^{s'} \quad \text{or} \\ (1 - \rho_{i,s}) \cdot A_i \cdot F_{ij}^s \cdot (1 - \rho_{j,s}) &= (1 - \rho_{j,s}) \cdot A_j \cdot F_{ji}^s \cdot (1 - \rho_{i,s}) \end{aligned}$$

For those who could have doubts about the applicability of the symmetry relation in presence of curved specular reflectors, it could be recalled that the symmetry relation has its correspondent in optics: the Lagrangian invariant.

$$\sum_{\forall j \text{ diffuse}} F_{ij}^s = 1$$

### ANNEX 3: GEBHART THEORY IN PRESENCE OF PARTLY SPECULAR / PARTLY DIFFUSE SURFACES

The purpose of this paragraph is to generalize the Gebhart factors equation when all the surfaces satisfy the assumptions:

1. each surface is isothermal
2. each surface is a gray body
3. each surface is a diffuse emitter
4. each surface is a partly diffuse/partly specular reflector
5. the radiosity is uniformly distributed across each surface

The Gebhart factor  $B_{ij}$  is the solution of the following set of equations:

$$B_{ij} = F_{ij}^s \cdot \alpha_j + \sum_{\forall l \text{ diffuse}} F_{il}^s \cdot (1 - \alpha_l) \cdot B_{lj}$$

or in a matrix form :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}) \cdot \underline{\underline{B}}$$

where  $\beta_{i,j} = F_{ij}^s \cdot \alpha_j$

#### Demonstration of the general properties of the Gebhart factors in the case of diffuse / specular reflections

Our aim is to redemonstrate the two general properties of the Gebhart factors:

$$1) \varepsilon_i \cdot A_i \cdot B_{i,j} = \varepsilon_j \cdot A_j \cdot B_{j,i} ; \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i}{(1 - \rho_{i,s})}$$

$$2) \sum_{\forall j \text{ diffuse}} B_{i,j} = 1 \text{ in the case of diffuse / specular reflections, making use of the equation } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\beta}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\beta}}) \cdot \underline{\underline{B}}$$

#### **Property 1:**

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \cdot A_i \cdot B_{i,j} &= \varepsilon_i \cdot A_i \cdot F_{i,j}^s \cdot \varepsilon_j \\ &+ \sum_{l \text{ diffuse}} \varepsilon_i \cdot A_i \cdot F_{il}^s \cdot \varepsilon_l \cdot \left( \frac{1 - \varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right) \frac{\varepsilon_l \cdot A_l}{\varepsilon_l \cdot A_l} B_{l,j} \end{aligned}$$

$$\text{or } \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{Y}}$$

$$\text{where } U_{ij} = \varepsilon_i \cdot A_i \cdot F_{ij}^s \cdot \varepsilon_j = U_{ji}, \quad G = \text{diag} \left( \frac{1 - \varepsilon'}{\varepsilon'^2 \cdot A'} \right)$$

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T ; \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}^T \Rightarrow \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}^T$$

since  $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{U}} + \dots$  where each term is symmetrical so Property 1 is demonstrated

#### **Property 2:**

$$\sum_{\forall j \text{ diffuse}} B_{i,j} = 1?$$

$$\text{or } \sum_{j \text{ diffuse}} Y_{ij} = \varepsilon_i \cdot A_i \quad \text{or} \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}?$$

where the vector  $\underline{\underline{u}}$  is defined by  $u_i = 1$  for  $\forall i$

The view factors satisfy the equation:

$$\underline{F} \cdot \underline{u} = \underline{u} \quad (\text{or } \sum_{j \text{ diffuse}} F_{ij}^s = 1 \text{ for } \forall i)$$

$$\underline{B} = [I - F + \beta]^{-1} \cdot \underline{\beta}$$

$$\underline{\beta} = [I - F + \beta] - [I - F]$$

$$\underline{B} = \underline{I} - [I - F + \beta]^{-1} \cdot [I - F]$$

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{u} - [I - F + \beta]^{-1} \cdot \underbrace{[\underline{u} - \underline{F} \underline{u}]}_{=0}$$

so  $\underline{B} \underline{u} = \underline{u}$

## Echanges radiatifs en présence de flux visibles venant directement du soleil ou d'autres sources visibles.

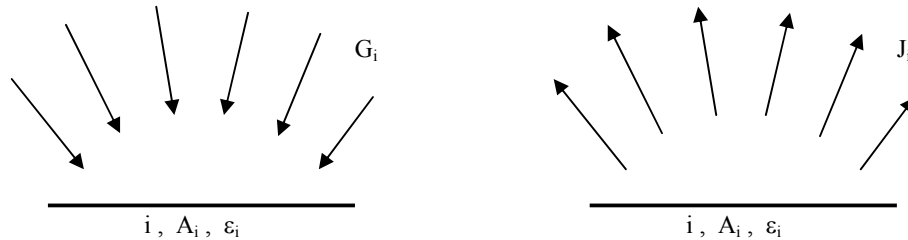
Nous allons établir les équations de l'échange dans le visible par similitude aux équations établies pour l'infrarouge. Soit une surface  $i$  d'aire  $A_i$  et d'émissivité  $\varepsilon_i$ , qui subit une irradiation  $G_i$  dans l'infrarouge et une irradiation  $G_i^*$  qui nous vient par réflexion de toute surface (mais pas directement du soleil ou de sa source pour nous éviter de modéliser les corps "visibles"), dans le visible\*.

Calculons le bilan radiatifs dans les deux domaines de longueurs d'onde.

### Infrarouge :

Dans le domaine de l'infrarouge, la surface est un émetteur :

$$J_i = \varepsilon_i E_b(T_i) + \rho_i G_i \quad \text{avec} \quad E_b(T_i) = \sigma T_i^4$$

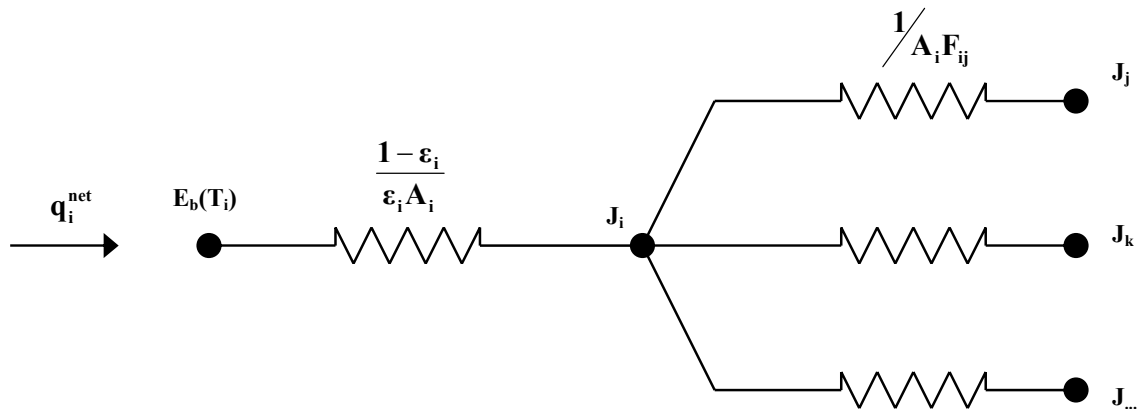


Le flux net quittant la surface vaut :

$$\frac{q_i^{\text{net}}}{A_i} = J_i - G_i = J_i - \frac{1}{\rho_i} [J_i - \varepsilon_i E_b(T_i)]$$

$$q_i^{\text{net}} = \frac{E_b(T_i) - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}}$$

Le schéma électrique équivalent, nous permet de calculer plus facilement



\* : Pour les calculs, nous utilisons la convention :

- variables avec \* : propriétés dans le visible (solaire)
- variables sans \* : propriétés dans l'infrarouge

$$q_{i-j}^{\text{net}} = \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = A_i (J_i - J_j) F_{ij}$$

# Contrôle thermique

$$q_i^{\text{net}} = \sum_{j \neq i} q_{i-j}^{\text{net}} = \sum_{j \neq i} A_i F_{ij} (J_i - J_j)$$

On peut en déduire la valeur de  $G_i$  :

$$G_i = J_i - \frac{q_i^{\text{net}}}{A_i} = J_i - \sum_{j \neq i} F_{ij} (J_i - J_j)$$

$$G_i = \sum_{\forall j} F_{ij} J_j$$

Ce qui est logique, par définition de  $F_{ij}$ . ( $G_i = \frac{1}{A_i} \cdot \sum_{\forall j} A_j J_j F_{ji} = \frac{1}{A_i} \cdot \sum_{\forall j} A_i J_j F_{ij} = \sum_{\forall j} J_j F_{ij}$ )

$$J_i = \varepsilon_i E_b(T_i) + \rho_i \sum_{\forall j} F_{ij} J_j$$

Cette relation peut d'ailleurs se démontrer par la théorie des circuits (voir plus loin).

Si on pose

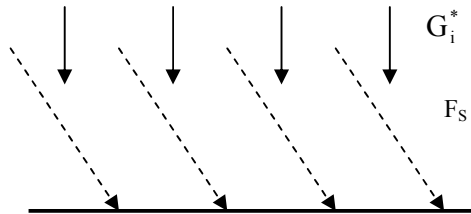
$$[S^{-1}]_{ij} = \delta_{ij} - \rho_i F_{ij},$$

alors

$$J_i = \sum_j S_{ij} \varepsilon_j E_b(T_j)$$

## Visible :

Dans le cas du visible, la surface absorbe le rayonnement extérieur, c'est-à-dire le flux solaire auquel s'ajoute le rayonnement solaire réfléchi par les autres surfaces.



A l'équilibre thermique, on a :

$$J_i^* = \rho_i^* F_s C_i^* + \rho_i^* G_i^*$$

avec  $C_i^* = \cos \theta_i = \cos \left( \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{F}_s}{\|\vec{F}_s\|} \right)$

où  $\vec{n}_i$  est la normale unitaire à la surface  $i$  et  $\vec{F}_s$  le flux solaire\*.

# Contrôle thermique

Le flux solaire absorbé et transformé en infrarouge vaut :

$$\frac{q_i^*}{A_i} = \alpha_i^* F_S C_i^* + \alpha_i^* G_i^*$$

On en déduit :

$$\left( \frac{q_i^*}{A_i} \right)_{\text{absorbé}} = \frac{\alpha_i^*}{\rho_i^*} J_i^*$$

De la même manière que précédemment :

$$J_i^* = \rho_i^* F_S C_i^* + \rho_i^* G_i^* = \rho_i^* F_S C_i^* + \rho_i^* \sum_{\forall j} F_{ij} J_j^*$$

Si on pose

$$[S^{*-1}]_{ij} = \delta_{ij} - \rho_i^* F_{ij} ,$$

alors

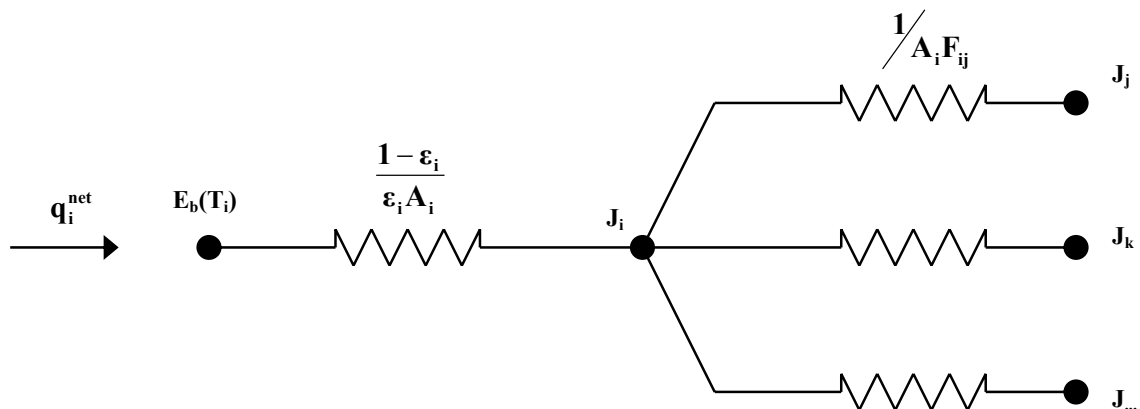
$$J_i^* = F_S \sum_j S_{ij}^* \rho_j^* C_j^*$$

$$\left( \frac{q_i^*}{A_i} \right)_{\text{absorbé}} = \frac{\alpha_i^*}{\rho_i^*} F_S \sum_j S_{ij}^* \rho_j^* C_j^*$$

Quantité de flux visible absorbé et transformé en IR par unité de surface i.

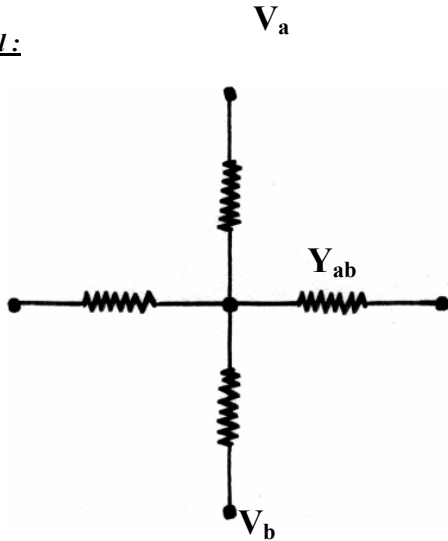
\* :  $F_S \cong 1350 \text{ W/m}^2$  à proximité de la Terre.

Démonstration plus rapide par la théorie des circuits



# Contrôle thermique

Rappel :



$$V_a = \frac{\sum_b Y_{ab} V_b}{\sum Y_{ab}}$$

Ainsi, on peut calculer  $J_i$  :

$$J_i = \frac{\sum_{j \neq i} A_i F_{ij} J_j + \frac{\epsilon_i A_i}{1 - \epsilon_i} E_b(T_i)}{\sum_{j \neq i} A_i F_{ij} + \frac{\epsilon_i A_i}{1 - \epsilon_i}}$$

$$J_i = \frac{\sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} E_b(T_i)}{\sum_{j \neq i} F_{ij} + \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i}}$$

$$J_i = \frac{\rho_i \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \epsilon_i E_b(T_i)}{\rho_i (1 - F_{ii}) + \epsilon_i}$$

$$J_i = \frac{\rho_i \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \epsilon_i E_b(T_i)}{1 - \rho_i F_{ii}}$$

$$J_i = \epsilon_i E_b(T_i) + \rho_i \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \rho_i F_{ii} J_i$$

$$J_i = \epsilon_i E_b(T_i) + \rho_i \sum_{\forall j} F_{ij} J_j$$

## Notions de température de puits et d'émissivité effective

Ce qui suit est bien connu de ceux qui se souviennent des théorèmes de Thévenin et de Norton de la théorie linéaire des circuits électriques.

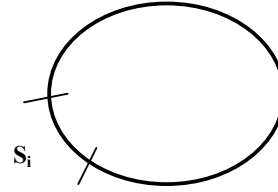
Les notions de température de puits et d'émissivité effective sont des notions importantes dans le calcul thermique des expériences sur satellite. L'analyse thermique d'un satellite et des expériences scientifiques à son bord se fait de façon indépendante par le responsable du S/C pour le satellite et les différents expérimentateurs pour les

# Contrôle thermique

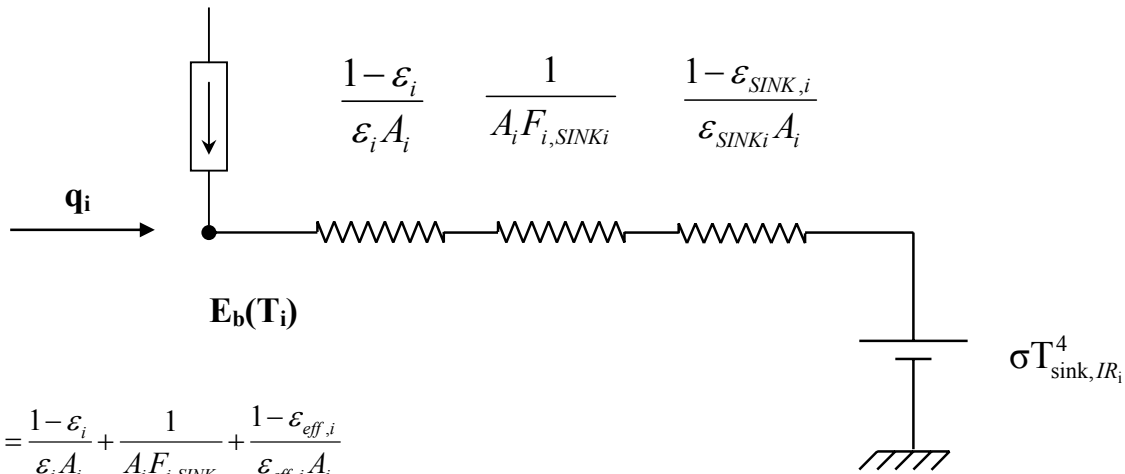
expériences. La géométrie de l'expérience et les émissivités des surfaces extérieures sont fournies à l'ESA ainsi qu'un modèle mathématique thermique. Après quelques mois, celle-ci nous envoie de retour pour chaque surface extérieure de l'expérience une température de puits et une émissivité équivalente.

En fait, ces notions nous permettent de définir les conditions aux limites extérieures de l'expérience, que ce soit pour faire les calculs thermiques ou même réaliser les tests.

La surface  $S_i$  échange avec l'environnement extérieur comme si la surface  $S_i$  voyait un corps d'émissivité IR effective  $\epsilon_{eff,IR}$  à la température  $T=T_{sink}$  avec un facteur de vue  $F_{i,sink}=1-F_{ii}$ .



$$I_{VIS} = A_i F_{vis} \alpha_i$$



$$R = \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i A_i} + \frac{1}{A_i F_{i,SINK}} + \frac{1 - \epsilon_{eff,i}}{\epsilon_{eff,i} A_i}$$

$$\sigma T_{SINK,i}^4 = \sigma T_{SINK,IR,i}^4 + R \cdot I_{VIS}$$

On en déduit que si  $q_i$  varie de  $\Delta q_i$ ,  $T_i$  variera suivant :

$$\Delta E_b(T_i) = 4\sigma T_i^3 \Delta T_i = R \cdot \Delta q_i$$

$$\Delta T_i = \frac{R \cdot \Delta q_i}{4 \cdot \sigma \cdot T_i^3}$$

Définition :

$T_{sink}$  d'une surface est la température d'équilibre de cette surface isolée en interne, en équilibre avec l'environnement externe à l'expérience (satellite, espace froid, flux solaire, albédo de la Terre, chauffettes

externes, ...).

# Contrôle thermique

$T_{\text{sink,IR}}$  d'une surface est la température d'équilibre de cette surface isolée en interne, en équilibre avec l'environnement externe à l'expérience (satellite, espace froid), en excluant tout flux visible (solaire, albédo de la Terre, chaufférettes externes, ...).

3. Si  $q_i = 0 \rightarrow T_i = T_{\text{sink } i}$  est la température d'équilibre face à l'environnement extérieur.
4. Si  $q_i = 0$  et  $I_{\text{visible}} = 0 \rightarrow T_i = T_{\text{sink, IR, } i}$  est la température d'équilibre face à l'environnement extérieur, sans flux visible. On remarquera que  $T_{\text{sink, } i}$  dépend de  $\varepsilon_i$  alors que  $T_{\text{sink, IR, } i}$  en est indépendant
5. Si  $T_i = 0 \rightarrow q_i = q_{\text{sink } i}$

$$q_{\text{sink}} = \frac{\sigma T_{\text{sink}}^4}{R}$$

$$\text{ou } R = \frac{\sigma T_{\text{sink}}^4}{q_{\text{sink}}}$$

ATTENTION : Ceci n'est correct que si le problème est linéaire (en  $T^4$  et  $q$ ), mais  $\varepsilon_i$  dépend en général de la température. Il faut alors définir les paramètres de puits proches des températures réellement rencontrées.

Dans la pratique il est très difficile d'imposer une température de 0 K. Une autre méthode pour calculer  $R$  consiste à prendre  $q_i = q_{i2}$  proche de la réalité  $\rightarrow T_{i2}$ .

$$q_{i2} = \frac{\sigma(T_{i2}^4 - T_{\text{sink } i}^4)}{R}$$

Si le modèle thermique de l'ensemble du satellite est non linéaire par la dépendance vis à vis de la température, des propriétés thermo-optiques, il est préférable de calculer  $R_i$  de la façon suivante :

On calcule la température d'équilibre de  $T_i$  pour deux flux  $q_i$  proches de la solution d'équilibre:

$$q_{i1} \rightarrow T_{i1}$$

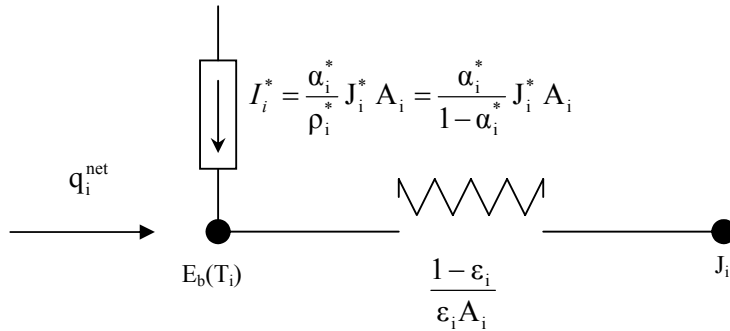
$$q_{i2} \rightarrow T_{i2}, \text{ on trouve : } R_i = \frac{\sigma(T_{i1}^4 - T_{i2}^4)}{(q_{i1} - q_{i2})}$$

N.B.  $R_i$  est le même dans les deux situations avec ou sans flux visible.

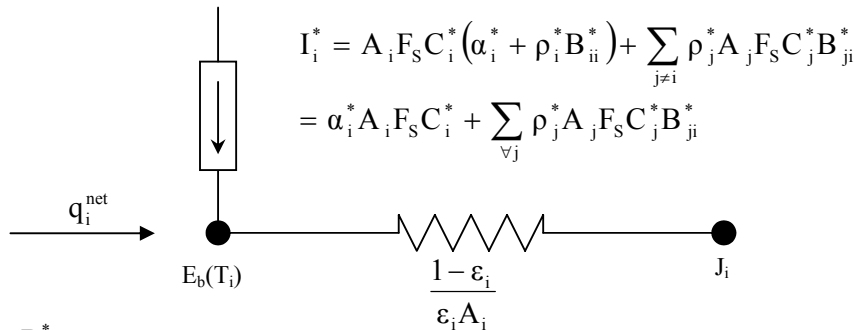
# Contrôle thermique

Echanges radiatifs avec l'environnement extérieur

Afin de tenir compte de l'apport d'énergie extérieur (flux solaire, albédo, chaufferette électrique, etc...) dans le circuit électrique équivalent, un injecteur de 'courant solaire' est placé sur le nœud  $E_b(T_i)$ , et non sur le nœud  $J_i$  !



Après l'introduction des facteurs de Gerbhard :



où les  $B_{ij}^*$  sont les facteurs de Gebhart solaires, c'ad la proportion de flux solaire réfléchi par i, qui finalement est absorbée par j pour être transformé en rayonnement thermique infrarouge.

$$B_{ij}^* = F_{ij} \alpha_j^* + \sum_{\forall k} F_{ik} (1 - \alpha_k^*) B_{kj}^*$$

$$1) \quad \sum_{\forall j} B_{ij}^* = 1$$

$$2) \quad \alpha_i^* A_i B_{ij}^* = \alpha_j^* A_j B_{ji}^*$$

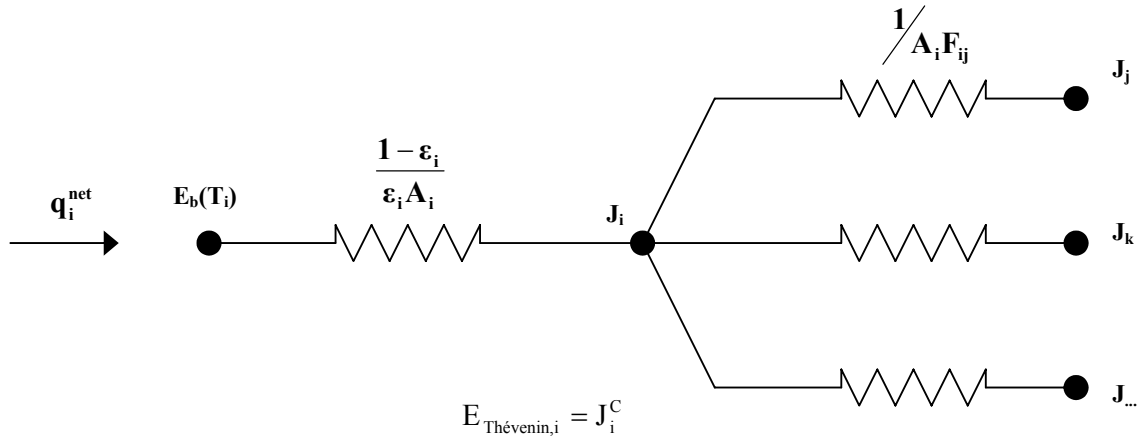
$$3) \quad B_{ij}^* = \sum_{\forall k} R_{ik} F_{kj} \alpha_j^* \quad \text{avec} \quad [R^{-1}]_{ij} = \delta_{ij} - F_{ij} \rho_i^*$$

$$4) \quad I_i^* = \frac{\alpha_i^*}{1 - \alpha_i^*} J_i^* = \frac{\alpha_i^*}{1 - \alpha_i^*} \cdot \sum_{\forall j} S_{ij}^* \rho_j^* C_j^* = \alpha_i^* A_i F_S C_i^* + \sum_{\forall j} \rho_j^* A_j F_S C_j^* \cdot \sum_{\forall k} R_{jk} \cdot F_{ki}^* \alpha_i^*$$

Notion de température de puits

La température de puits peut aussi être déterminée en utilisant le théorème de Thévenin.

# Contrôle thermique



où l'indice C correspond au cas où on coupe le lieu interne  $E_b(T_i)$ , c'ad  $q_i^{\text{net}} = 0$ .

$$E_{\text{Th,IR},i} = \frac{\sum_{j \neq i} A_i F_{ij} J_j^C}{\sum_{j \neq i} A_i F_{ij}} = \frac{\sum_{j \neq i} J_j^C F_{ij}}{1 - F_{ii}}$$

$$E_{\text{Th,IR},i} = \frac{G_i^C}{1 - F_{ii}} \quad (= G_i^C \text{ si } i \text{ est convexe}).$$

$$E_{\text{Th,IR},i} = \frac{G_i^C}{1 - F_{ii}}$$

$$E_{\text{Th},i} = \sigma T_{\text{sink},i}^4$$

$E_{\text{Th}}$  : irradiation de la surface isolée

$T_{\text{sink}}$  : température de puits, c'ad la température de la surface isolée en équilibre avec son environnement.

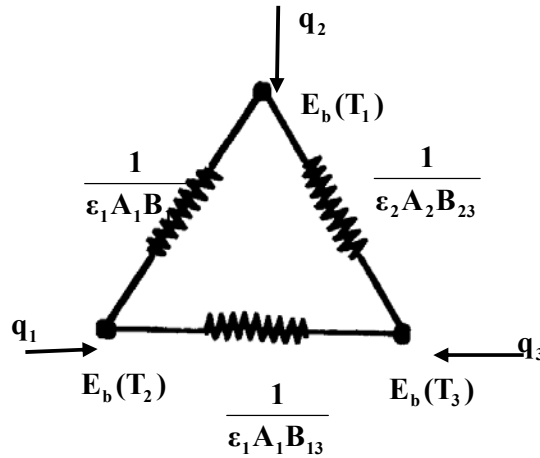
# Contrôle thermique

En utilisant les facteurs de Gebhardt :

$$B_{ij} = F_{ij}\epsilon_j + \sum F_{ik}(1 - \epsilon_k)B_{kj}$$

de plus

$$Y_{ij} = \epsilon_i A_i B_{ij}$$



$$E_{Th,1} = (E_{b,1})_{q_i=0} = \frac{\sum_{j \neq 1} \epsilon_j A_j B_{1j} E_b(T_j)}{\sum_{j \neq 1} \epsilon_j A_j B_{1j}}$$

$$E_{Th,1} = \frac{\sum_{j \neq 1} B_{1j} E_b(T_j)}{1 - B_{11}}$$

$$E_{Th,1} = \frac{G_1^C}{1 - F_{11}}$$

$$Y_{ij} = \epsilon_i A_i B_{ij}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{Y}}$$

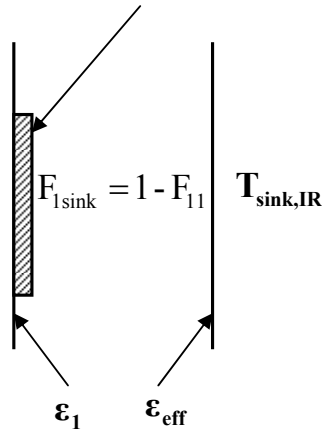
$$U_{ij} = \epsilon_i A_i F_{ij} \epsilon_j \quad \text{matrice symétrique}$$

$$G_{ij} = G_{ii} \delta_{ij} = \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i A_i} \delta_{ij} \quad \text{matrice diagonale}$$

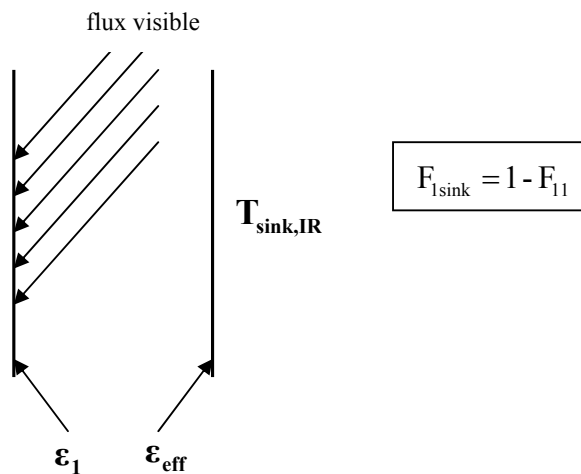
$$\underline{\underline{Y}} = [\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}}]^{-1} \underline{\underline{U}} \quad \text{matrice symétrique}$$

# Contrôle thermique

Chaufferette électrique (injecte le flux visible)

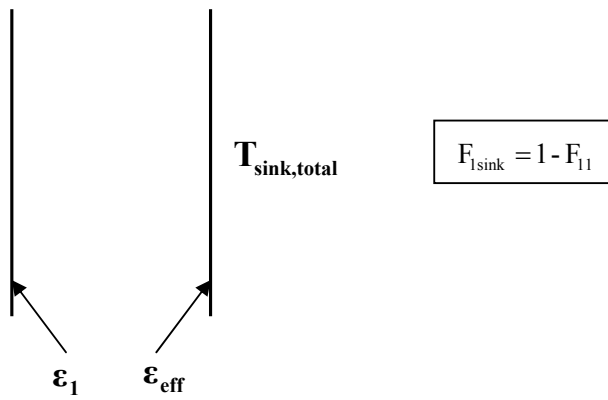


En agissant de la sorte, on suppose bien calculer le flux visible réellement absorbé (réflexions multiples) et avoir une valeur correcte de  $\alpha$ .



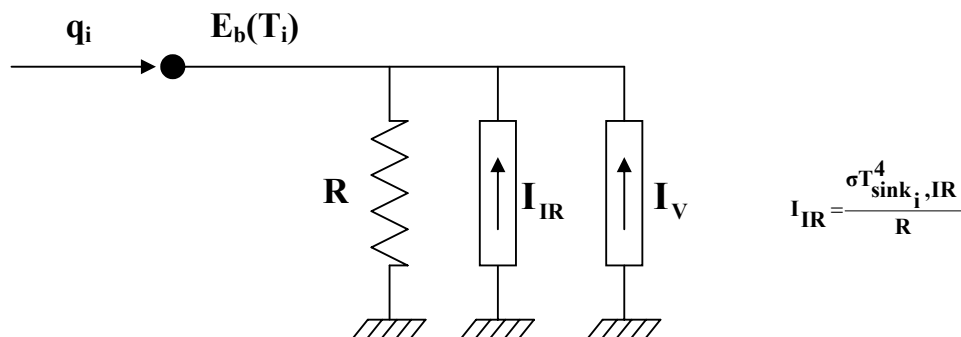
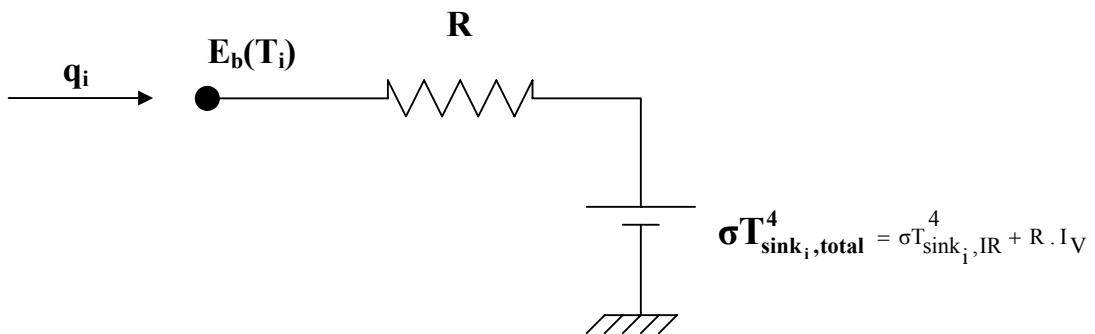
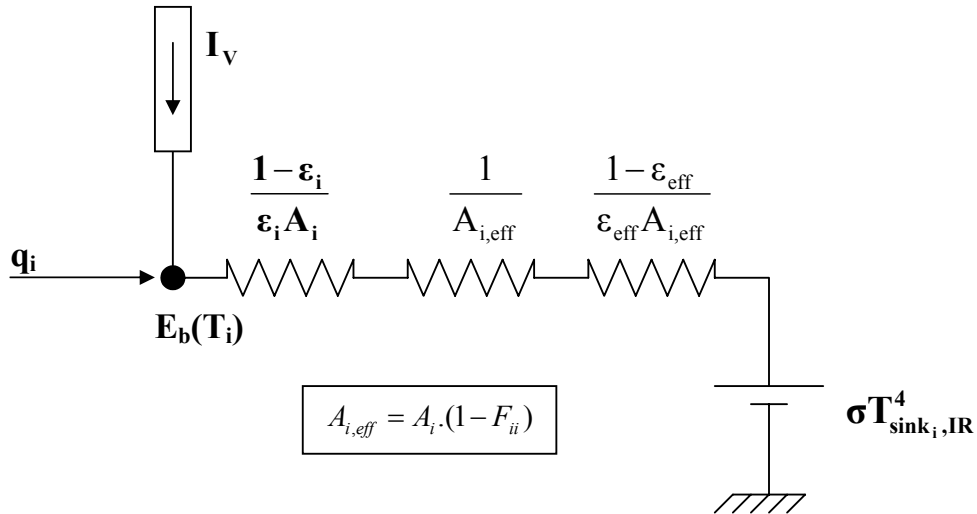
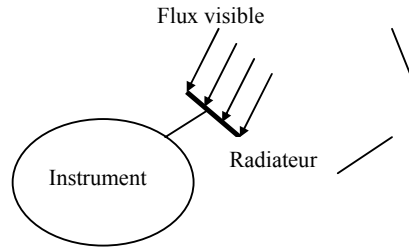
Cette méthode est la meilleure car elle ne fait aucune hypothèse sur les valeurs de  $\alpha$  et de  $\epsilon$ . Elle prend le mieux en compte des réflexions multiples mais il faut un simulateur solaire à sa disposition.

# Contrôle thermique



Cette méthode est expérimentalement la plus simple mais elle a les mêmes inconvénients que la première.

# Contrôle thermique



# Contrôle thermique

